Passend reken-/wiskundeonderwijs voor alle leerlingen

Frans Moerlands en Hein van der Straaten

Inleiding

In onze zoektocht naar verbetering van het rekenonderwijs hebben we in het PARWO-project een aantal uitgangspunten gekozen, die leerkrachten en schoolteams nieuwe inspiratie kunnen leveren om rekenlessen voor kinderen uitdagend en spannend te maken. PAssend Reken-Wiskunde Onderwijs (PARWO) is in onze ogen onderwijs waar kinderen plezier en uitdaging in vinden. Het is onderwijs waarin kinderen zelf met onderzoekende en speelse activiteiten hun rekenvaardigheid actief ontwikkelen en oefenen.
Dat zoeken naar beter rekenonderwijs niet zomaar een verzameling leuke lesideeën oplevert proberen we in dit artikel duidelijk te maken. In de lesideeën zit een samenhangende visie en een gedegen opbouw. Veel van de lesideeën die op de PARWO-site staan uitgewerkt zijn in de praktijk ontstaan en door leerkrachten zelf ontworpen.
Dat daaraan een gedegen scholing en ondersteuning voorafgegaan is mag niet onvermeld blijven. Met dit artikel hopen we een bijdrage te leveren aan verdere verspreiding van onze inspiratie om passend rekenwiskundeonderwijs te ontwerpen.
Wij hopen dat leerkrachten na het lezen van dit artikel in staat zijn hun ideeën voor boeiende activiteiten van kinderen een ‘passende’ plaats te geven in een samenhangend beeld van verantwoord rekenwiskundeonderwijs.

In dit artikel beschrijven wij in paragraaf 1 een aantal aspecten van onderwijs, die ieder afzonderlijk slechts een beperkte kijk geven op de uitdagingen waar we voor staan.
Door in paragraaf 2 deze invalshoeken met elkaar in samenhang te plaatsen krijgen we een ruimer perspectief op de didactiek van rekenen en wiskunde. De metafoor van de ijsberg maakt duidelijk dat het om meer gaat, dan alleen sommen maken.
In paragraaf 3 maken we een uitstapje naar de analyse van getalbegrip om vervolgens in paragraaf 4 de gelaagdheid in de ijsbergen te illustreren.

1 Aspecten van onderwijs

Kinderen leren rekenen en wiskunde.

Om te weten wat kinderen op het gebied van rekenen en wiskunde moeten kennen en kunnen ligt het voor de hand om bij de inhoud van de wiskunde te rade te gaan.
Gaat het daarbij alleen om sommen maken of formules invullen? In de wiskunde opereren we met kale, abstracte getallen, waarbij de concrete betekenis er niet meer toe doet. Maar is die kennis van wiskunde ook automatisch geschikt om aan kinderen aan te bieden?
Als je die kennis eenmaal verworven hebt, kun je daar dan gebruik van maken als je bijvoorbeeld hiernaast de folder van de hogedrukspuit bestudeert? Is de werkdruk van de spuit 160 – 10 = 150? Is de spanning 400/50 als breuk te vereenvoudigen tot 8? En moet je 390 x 290 x 860 uitrekenen om de afmetingen te weten?

		1100
Werkdruk	bar	160 - 10
Opbrengst	ltr/h	780
Watertoevoertemp.	EC	60
Aansluitwaarde	kW	4,9
Spanning	V/Hz	400 / 50
Reinigingsmiddeltank	ltr.	4
L x B x H	mm	390x290x860
Gewicht	kg	29
Bestelnummer		30210196
Prijs		**1495,00**

De realiteit
In de realistische rekendidactiek proberen we de werkelijkheid in ons onderwijs een plaats te geven. Maar vinden we in de ‘moderne’ realistische methoden informatie, waar kinderen mee leren omgaan? Wordt in die methoden de echte wereld verkend of is het toch steeds een kapstok om sommen aan op te hangen? We wagen ons hier niet aan voorbeelden, maar in elke rekenmethode zijn er talloze te vinden. Is de hogedrukspuit dan wel het goede voorbeeld? Hebben kinderen daar iets mee? Waarschijnlijk niet! Toch zijn er veel voorbeelden te bedenken van onderwerpen waar kinderen wel degelijk mee te maken krijgen. Zo ligt dat anders met de treinkaartjes in het onderstaande lesontwerp. Het is voor kinderen zinvol om dergelijke informatie te kunnen lezen en interpreteren.

Een goed voorbeeld van een onderwijsontwerp is de activiteit met treinkaartjes, die door Marie-José van Heugten in het SBO is uitgewerkt. De start van deze activiteit ligt in het onderzoeken van de betekenis van de verschillende getallen, die op treinkaartjes staan afgedrukt. Kinderen worden hier uitgedaagd om zelf op zoek te gaan naar de betekenis van getallen in hun reële context. Het daagt kinderen uit tot verkenningen, die soms nog ver buiten het gebruikelijke aanbod van rekenactiviteiten in methoden liggen. Zo onderzoeken kinderen wat ‘40 % reductie’ zou kunnen betekenen en zij vinden een voor dit moment afdoende invulling van de begrippen ‘reductie’ en ‘procent’. Juist zulke globale eerste verkenningen van (wiskundige) begrippen leiden tot de opbouw van een gevarieerd leerlandschap[1] . Naar aanleiding van de cijferreeksen op de achterkant van een treinkaartje onderzoeken de kinderen telefoonnummers en zij ontdekken, dat die altijd uit 10 cijfers bestaan.
Dat vragen in eerste instantie ook onbeantwoord kunnen blijven als zelfs de leerkracht het niet weet, leidt tot nieuwe uitdagingen en initiatieven van de kinderen zelf. De realiteit van de treinkaartjes; de wiskunde achter getallen en begrippen; de nieuwsgierigheid en de onderzoekende houding van lerende kinderen; de manier waarop een leerkracht erin slaagt om daar een rijke onderwijssituatie van te maken; dat zijn voorbeelden van de ingrediënten, waarmee wij passend reken-wiskundeonderwijs willen ontwerpen.

Onderwijs, de leeromgeving
Onderwijs wordt gefaciliteerd door methoden, werkvormen, materialen, en wordt mede bepaald door groepssamenstelling, afspraken op schoolniveau, enzovoort. Onderwijs moet goed georganiseerd zijn. Doorlopend worden daar nieuwe ideeën en modellen voor bedacht. Denk aan zelfstandig werken, verlengde instructie en de instructietafel, coöperatieve werkvormen, differentiatievormen als hoekenwerk en werken in circuits. Daarnaast wordt veel tijd en energie gestoken in de zorg voor individuele leerlingen. Toetsing, hulpprogramma’s en handelingsplannen vragen tegelijk met het reguliere werk in de klas om aandacht. Er gaat veel energie zitten in zulke vernieuwingen. Is onderwijs verbeteren vooral een kwestie van beter organiseren? Komt de inhoud dan vanzelf wel in orde?

Michael, een bijdetijdse jongen
Michael is een leerling uit de middenbouwgroep van een SBO school. Het rekenen gaat hem niet best af. Op verzoek van de leerkracht ga ik[1] in gesprek met Michael en probeer te achterhalen waar de schoen wringt.
De werkboekjes waar Michael in werkt gaan ook mee. We vinden een rustig plekje en bladeren daar samen het werkboekje door. Ik vraag Michael om te vertellen wat hij moeilijk - makkelijk, leuk of vervelend vindt.
Zo komen we op een blad met sommen tot 20. Michael laat zich ontvallen dat hij bij deze sommen zijn horloge gebruikt. Hij laat me zien hoe het werkt bij de som 5+7.
Hij houdt zijn horloge voor, wijst op de 5 en telt hardop 7 verder tot hij bij 12 uitkomt. "Antwoord 12".



Dan wijst hij op 8+6 en geeft aan dat hij deze som niét kan oplossen. Hij telt vanaf 8 door tot 12 en concludeert dat hij maar 4 stappen kan maken!
"En dan heb je een probleem?", is mijn vraag.
Michael: "Ja, dan heb ik er heel veel problemen mee."
Wijzend op het werkblad: "En deze kan ik ook niet: 8 + 7; 7 + 6; …."
Michael loopt één voor één de sommen af en geeft aan welke sommen hij wel en niet met zijn horloge kan oplossen. De som 4 + 8 gaat bijvoorbeeld weer wel. Hij laat het zien op z'n horloge. Vanaf 4 telt hij 8 stappen verder. Vol trots: 12!

Michael vertrouwt me spontaan toe dat hij dit zo al heel lang doet.
"Je rekent dus eigenlijk al heel lang op je horloge? En dat heeft niemand door?"
Michael: "Nee, niemand heeft dat door".
Op de vraag of hij dat ook prettig vindt, volstaat Michael met een instemmende hoofdknik.
Hierna snuffelen we verder door de methode. We stuiten daarbij op grote getallen die Michael erg lastig vindt. "Ik draai ze vaak om", zo weet hij inmiddels.
We hebben nog even doorgebabbeld!

Uiteindelijk gaat het om het verbeteren van het leerproces van kinderen. Dat kan niet los gezien worden van wat kinderen leren en hoe ze dat leren. Een grondige bezinning op de wijze waarop kinderen leren rekenen is daarom uitgangspunt geweest voor de ideeën achter passend rekenwiskundeonderwijs.

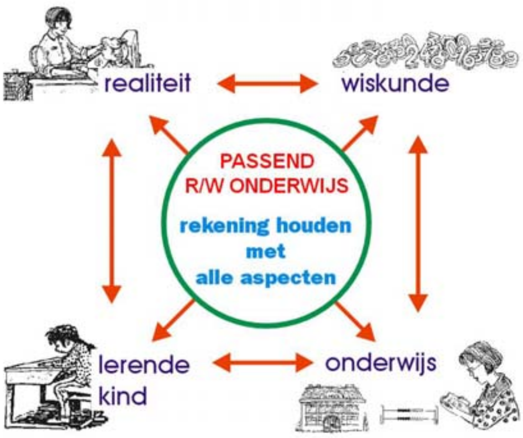
Het lerende kind
We proberen de leeromgeving geschikt te maken om te leren. Het voorbeeld van Michael laat zien, dat dit bij kinderen soms heel anders uitpakt. Michel is wel bezig, maar de vraag is of zijn handelen wel zinvol is en voldoende kwaliteit heeft. Wil onderwijs landen, dan moet het aansluiten bij de motivatie en de vaardigheden van het kind.
Maar ook de gerichtheid is van belang. Wij hebben meestal wel duidelijk wat wij willen met onze lesactiviteit, maar willen kinderen dat ook? Zijn kinderen vaak niet op andere zaken

[1] Frans Moerlands

gericht? Een beloning krijgen, of aandacht? Of van het gedoe af zijn? Kinderen bedenken de slimste trucs om voor elkaar te krijgen wat op hun eigen agenda staat! Het lijken triviale zaken, maar onderzoek in het speciaal (basis)onderwijs – waar we als het ware een vergrootglas leggen op het leerproces – maakt duidelijk dat er in de omgang met kinderen veel mis gaat. Kinderen worden onvoldoende begrepen en er wordt te weinig gelet op wat zij zelf willen, kunnen en doen. Er moet in de beleving van kinderen daadwerkelijk iets gebeuren, waardoor zij actief worden en tot wiskundig handelen komen.

2 Een integrale aanpak

Om goed onderwijs te maken is een integrale aanpak nodig. Je ziet dat ook in de aandachtsgebieden in de figuur hiernaast.



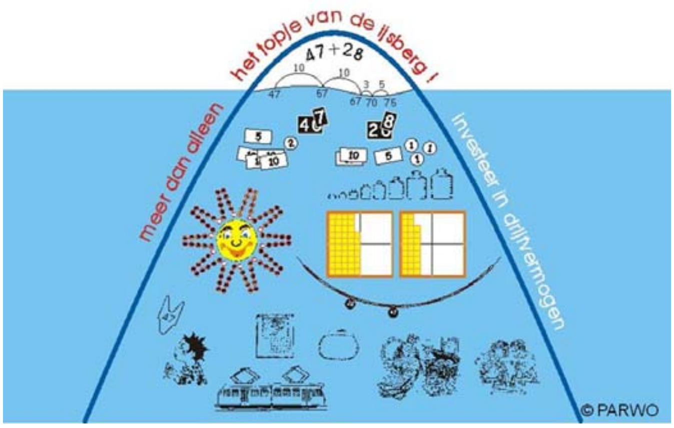
Je ziet daar niet alleen ‘wiskunde’ staan, maar ook ‘realiteit’, ‘het lerende kind’ en ‘onderwijs’. Bij goed onderwijs besteed je aandacht aan al deze gebieden en heb je oog voor de wisselwerking daartussen (de pijlen die de aandachtgebieden verbinden).
Zoals hierboven al geschetst is, zijn de aandachtsgebieden ‘wiskunde’ en ‘realiteit’ samen vooral bepalend voor het ontwikkelen van gecijferdheid[2].
Bij gecijferdheid maken kinderen gebruik van basale wiskundige vaardigheden, zoals: het kritisch kunnen waarnemen, symboliseren, modelleren, efficiënt kunnen beschrijven en plannen op papier kunnen uitwerken. Deze aandachtsgebieden bepalen de doelen.

In de aandachtsgebieden ‘lerende kind’ en ‘onderwijs’ gaat het veel meer over de vormgeving van het onderwijs. De onderzoekende activiteit van kinderen is cruciaal. Met probleemsituaties, die betekenis hebben voor de kinderen zelf en met vragen die de nieuwsgierigheid prikkelen ontstaat een leerhonger, die tot wiskundig handelen leidt. Gecijferdheidsonderwijs is per definitie actief onderwijs. Daarin wordt veel ruimte gegeven aan onderzoek en experiment. Er vindt overleg plaats, waarbij ervaringen en inzichten worden uitgewisseld. Kritische vragen (van de leerkracht) zorgen ervoor, dat inzichten naar een hoger plan worden getild en elementaire inzichten worden met zinvolle oefeningen geconsolideerd. De leerlingen kunnen zo als jonge onderzoekers de wiskunde herontdekken. In dit proces is het van essentieel belang, dat kinderen de ruimte krijgen uitdrukking te geven aan hun verwarring, aan het niet begrijpen en aan niet zeker weten. Mits goed begeleid door de leerkracht leidt juist die verwarring tot verder op zoek gaan naar hoe het dan wel in elkaar zit. In die zoektocht vullen kinderen op hun eigen manier wiskundige inzichten en begrippen. Zij helpen elkaar daarbij met hun vragen, overtuigen elkaar met hun vondsten en zorgen daarmee voor een toenemend ‘zeker weten’, gebaseerd op steeds rijker gevulde wiskundige ideeën. De rol van de leerkracht is daarbij van wezenlijk belang. Zonder goede begeleiding en sturing in het gesprek is het even goed mogelijk, dat de verwarring bij kinderen alleen maar toeneemt of dat verkeerde interpretatie van begrippen wordt versterkt. Zorgvuldig aandacht besteden aan dit proces geeft concreet invulling aan de drie kerndoelen die ‘wiskundig inzicht en handelen’ beschrijven.

23	De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken.
24	De leerlingen leren praktische en formele reken-wiskundige problemen op te lossen en redeneringen helder weer te geven.
25	De leerlingen leren aanpakken bij het oplossen van rekenwiskundeproblemen te onderbouwen en leren oplossingen te beoordelen.

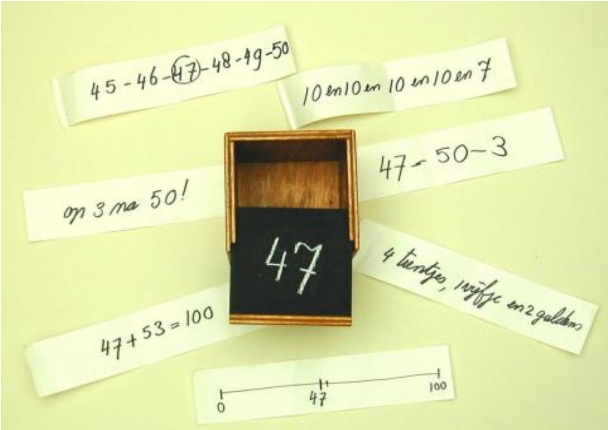
Dat het in het rekenwiskundeonderwijs gaat om meer dan alleen sommen maken wordt mooi verbeeld in de metafoor van de ijsberg[3]. Zoals bij een echte ijsberg het zichtbare deel slechts een klein deel is van de werkelijke inhoud, zo geldt voor het rekenen dat de sommen slechts het topje van de ijsberg zijn. Het drijfvermogen en letterlijk het zwaartepunt ligt onder water. En juist dat drijfvermogen vraagt om investeren. Zo leren we kinderen zwemmen!

Dit simpele besef, dat er een zichtbaar topje is en een minder zichtbaar drijfvermogen, kan je behoeden voor de valkuil dat je (zichtbare) sommen aanleert zonder het (minder zichtbare) onderbouwende inzicht te ontwikkelen. Methodes zijn hier niet altijd zorgvuldig in, maar ook door leerkrachten zelf worden – vaak onder druk van de formele opbrengsten (de toetsen) – de onderbouwende leeractiviteiten overgeslagen of onvoldoende geoefend.



Om de metafoor van de ijsberg goed te begrijpen, is het belangrijk stil te staan bij de verschijningsvormen van het fenomeen 'getal'. Het lijkt zo simpel en eenduidig, maar een getal kan veel betekenissen hebben. Je zag dat al in de inleiding.
In de ijsberg 'tot 100' zie je bovenin een som met kale getallen: 47+28.
Nu zou je rekenen kunnen zien als 'bouwen met getallen'. Om te bouwen heb je bouwstenen en gereedschap nodig. In dit beeld zijn de getallen de bouwstenen. Rekentechnieken en basale vaardigheden (tellen, structuur aanbrengen, stapsgewijs uitschrijven) kun je zien als het gereedschap.

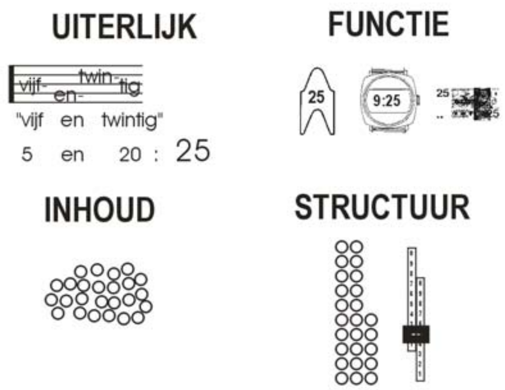
Zowel bouwstenen als gereedschappen moeten in de loop van het leerproces zorgvuldig worden ontwikkeld.
We richten ons even op de getallen. Om zinvol met getallen als 47 en 28 te kunnen ‘werken’, moet zo’n getal vorm en inhoud hebben. In beginsel is het symbool 47 niet meer dan een lege doos. Met ons onderwijs vullen we ‘getallendozen’ met een diversiteit aan ervaringen en kenniselementen.



Samen vullen kinderen de rugzak waaruit zij putten als ze rekenstrategieën op de getallen loslaten. Dat het handig is om bij 47 eerst 3 erbij te doen en niet 4 of 5, zie je niet aan het uiterlijk van dat getal zelf. Dat inzicht wordt op een basaler niveau ontwikkeld.
Het proces van ‘bouwstenen vullen’ noemen we de ontwikkeling van het getalbegrip.

3 Analyse van getalbegrip

De analyse van het getalbegrip helpt ons bij de vormgeving van het leerproces. Het verklaart ook de niveaulagen van de ijsberg. Het ontwikkelen van getalbegrip is immers het steeds verder verdiepen van de kennis van de getallen.
Welke elementen komen we daarin tegen?
In de ontmoeting met de wereld komen de leerlingen getallen tegen als een bonte verzameling tekens, met een specifieke en niet onbelangrijke betekenis.
Getallen geven aan of je bij het goede huis bent, of er voldoende koeken in een pak zitten, op welke dag je jarig bent, enzovoort.



Getallen hebben een uiterlijk (hoe kom je ze tegen), een functie (wat duiden we er mee aan); een inhoud (de waarde) en structuur (hoe is het getal samengesteld).

Uiterlijk van de getallen
Het meest in het oog springend element is het uiterlijk, de verschijningsvorm van de getallen: de schrijfwijze van de symbolen en de klank, de uitspraak van het getal. Het gevaar bestaat, dat je denkt daarmee al te kunnen rekenen. Het is verleidelijk om al snel met getallen aan de slag te gaan. Zeker als somtypegewijs wordt gewerkt is het niet zo moeilijk om kinderen rekentrucjes te leren. Het uiterlijke gedrag van de getallen zou daar voldoende houvast voor kunnen bieden: 45 + 23; de 4 en de 2 wordt 6 en de 5 en 3 wordt een 8; dus samen 68.
Rekenen op basis van uiterlijke kennis kan, maar het is glad en erg dun ijs!

Een ander voorbeeld van een lesontwerp is de verkenning van cijfervormen. In plaats van de kinderen heel gestructureerd de schrijfwijze van de cijfers aan te leren, confronteren we ze juist met de bonte cijfers zoals ze die in de echte wereld tegenkomen.

©PARWO

©PARWO

We zetten deze cijfers op kaartjes en laten de kinderen daarmee stoeien. We leggen niet uit wat dit voor getallen zijn. In plaats daarvan vragen we de kinderen om al puzzelend met deze cijferkaartjes uit te zoeken welke cijfers bij elkaar horen. Juist daardoor leren ze de grondstructuur van de cijfers kennen.

Dat gecijferdheidsonderwijs ook sterk gericht kan worden op het ontwikkelen van rekenvaardigheden illustreert de activiteit met de Telbak. Daarbij wordt een verzameling alledaags materiaal gebruikt om kinderen 'handige teltechnieken' aan te leren. De kinderen worden in de rol van kritisch consument geplaatst. Ze gaan kijken of de inhoudsgegevens op de verpakkingen wel kloppen. Zitten er inderdaad zoveel koeken in het pak? Telt die WC-rol wel echt 200 vel? Dat wordt natellen natuurlijk. En ja, hoe doe je dat handig?

Het zijn geanimeerde activiteiten, maar tegelijk efficiënte 'niveauverhogers'. Kinderen denken na over de manier waarop het tellen handig georganiseerd kan worden. Controleer maar eens een zak met 2000 roerstokjes!

Zoals je merkt zijn in deze voorbeelden ook andere aandachtsgebieden meegenomen. De kinderen zijn zelf actief en de leerkracht wordt met adequaat materiaal gefaciliteerd.

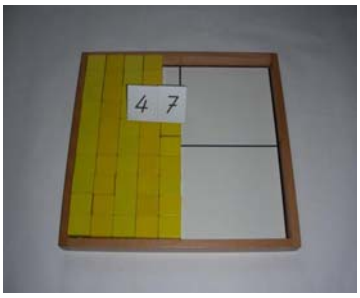
Functie van de getallen

Getallen hebben in allerlei situaties verschillende functies, die het onderzoeken waard zijn. In het onderwijs wordt vooral aandacht besteed aan het rekengetal. Veel getallen in onze directe omgeving zijn juist geen rekengetallen, maar geven ons wel heel uiteenlopende informatie. Voor leerlingen is het belangrijk onderscheid te kunnen maken: waar geeft het getal informatie over en is het wel of niet een getal waarmee gerekend kan worden (in het voorbeeld van de hogedrukspuit bleek dat bepaald niet bij elk getal het geval).

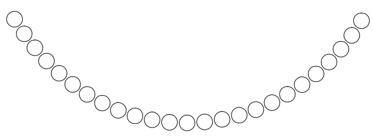
Inhoud van de getallen

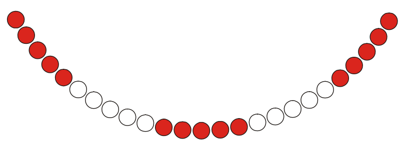
Een belangrijk derde element is de 'inhoud' van het getal. Het 'volume', het aantal dat een getal representeert. In rekensommen gaat het bijna altijd over getallen die een inhoud representeren. 'In het pak zitten12 koeken; 4 koeken verdwijnen in mijn buik. Hoeveel over?'

Het is belangrijk dat kinderen een goed beeld krijgen van de inhoud van de getallen. En ze moeten het kunnen aflezen van het uiterlijk van de getallen. Neem de getallen 19 en 91. Zo op het oog redelijk gelijkwaardige verschijnselen. Het zijn immers dezelfde tekens. Inhoudelijk is het verschil echter enorm. En voor wie die getallen aan het verkennen is blijkt dat bepaald niet zo eenvoudig. Er is een verwarrend verschil tussen schrijfwijze en uitspraak. Kinderen gaan daar vaak de fout mee in. Door het uiterlijk van de getallen systematisch te koppelen aan de inhoud kunnen we die problemen voorkomen. In onze didactiek doen we dat door bij inhoudelijk modelmateriaal het getal steeds met getalwaardekaartjes op te laten zetten. Dat werkt buitengewoon effectief!



Structuur van de getallen
Het vierde en mogelijk belangrijkste element van getalbegrip is ‘structuur’. Structuur is het bindmiddel dat je onder andere in staat stelt om grote hoeveelheden in één keer te overzien. De voorbeelden hieronder spreken voor zich:



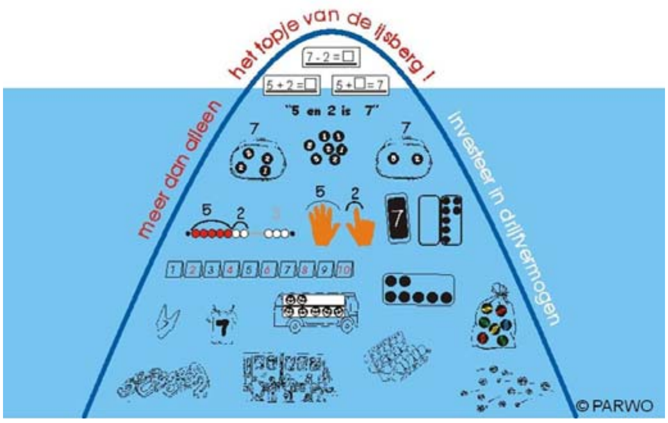


Structuur zit in de inhoud van de getallen, maar ook in de schrijfwijze. In ons getalsysteem hebben cijfers in een getal een positiewaarde. Dat bepaalt het verschil tussen het getal 19 en 91. Hoewel er verder niets bijzonders aan te zien is, is het eerste cijfer in zo'n getal een tienvoud. De 1 in 19 is in werkelijkheid 10 en dus ook meer dan de 9 die ernaast staat. Kinderen moeten dat inzicht verwerven. En alleen al door de verwarrende uitspraak is dat bepaald niet eenvoudig.
In een goed leerproces zal de structuurkennis in de getallen worden opgenomen. De wetenschap dat 47 op 3 na 50 is, is cruciaal bij het uitrekenen van een som als 47+28.

Koppelen
De kunst bij de ontwikkeling van het getalbegrip is om deze vier getalselementen aan elkaar te koppelen. Een getal kunnen schrijven is mooi, maar weten welke betekenis je er aan kunt geven, welke inhoud het heeft en hoe het zich verhoudt tot de decimale structuur, dat gecombineerde inzicht maakt van een getal een bruikbare bouwsteen.
Zorgvuldig en in samenhang opbouwen van deze vier aspecten van getalbegrip is nog niet zo eenvoudig. Het is een langlopend leerproces, waarin elk aspect met gerichte oefeningen verankerd wordt.
Dat geldt voor functionele telactiviteiten en automatisering van de telrij en het schrijven van cijfers en getallen.
Dat geldt ook voor het onderzoeken van de inhoud van getallen. Het hoeveelheidsaspect van een getal is in eerste instantie gekoppeld aan de concrete betekenis van het getal. Pas na verloop van tijd zijn kinderen in staat getallen los te zien van die concrete inhoudelijke beelden. Abstraheren daarvan is een moeizaam proces, dat met behulp van modelmateriaal geoefend en ondersteund kan worden.
Ten slotte vraagt het gericht onderzoeken van handige structuren, zoals de 5- en de 10-structuur en verdubbelen veel aandacht. Ook dit vraagt om regelmatig oefenen en automatiseren.
Het volgen van leerlingen in hun ontwikkeling door middel van toetsen[4] op de verschillende onderdelen in dit proces is een vanzelfsprekend onderdeel van het project.

4 Gelaagdheid in de ijsbergen

Elementen van getalbegrip komen samen in de ijsbergen.
Als je met deze wetenschap kijkt naar de ijsbergen[5], dan zie je dat uiterlijk en functionaliteit vooral in de onderste laag te vinden is. De eerste verkenning speelt zich af op het niveau waar je de echte werkelijkheid tegenkomt. In de laag daarboven zie je modelmaterialen, die inhoud en structuur illustreren. Het meest perspectiefrijk zijn uiteraard de 5- en 10-structuren.
Op het derde niveau zie je getallen in verschillende samenstellingen.

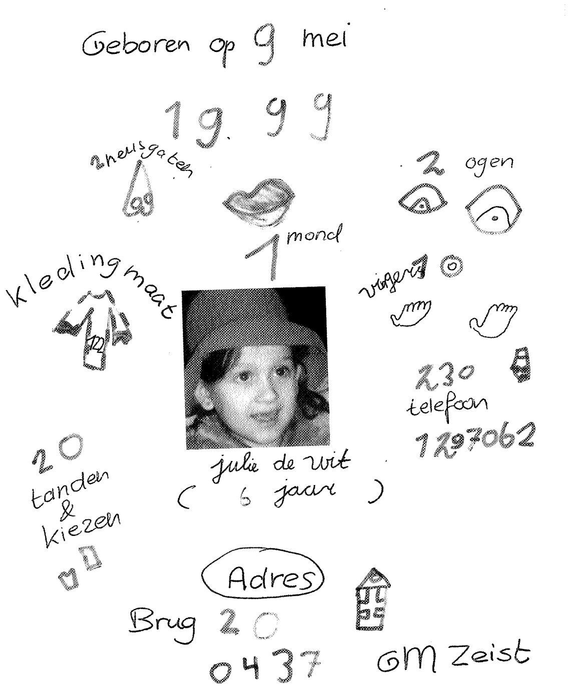


In principe zijn de getallen in deze laag al 'gevuld'. Het zijn betekenisvolle bouwstenen waarin de vier getalselementen met elkaar zijn verstrengeld. De ontwikkeling van het getalbegrip is daar grotendeels voltooid en de leerlingen zijn in staat om allerlei rekenhandelingen met deze getallen uit te voeren. Het zijn vooral de sleutelgetallen die hier gebruikt worden: de mooie ronde getallen die ook in meetsystemen en geld worden toegepast: 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, enzovoort.
De kinderen leren ze te combineren en uiteen te leggen en ontwikkelen daarmee breed toepasbare getalrelaties zoals: samenstellen, splitsen, aanvullen, verschil bepalen, wisselen.
Binnen de ijsberg zijn en aantal lagen geschetst. Ze schetsen een soort didactische opbouw van toenemende formalisering.

In de route door de ijsberg (van onder naar boven), speelt zich in essentie een abstractieproces af. Waar in eerste instantie echte vogeltjes in beeld zijn (onderin) staan uiteindelijk alleen nog getalsymbolen (bovenin). Sommen zijn de ultieme abstractie. In de route wordt een stukje werkelijkheid teruggebracht tot zijn wiskundige essentie en wordt het verrijkt met de perspectieven die in de verschillende lagen worden toegevoegd.

1. Verkenning van uiterlijk en functionaliteit

In het meest basale niveau van de ijsberg krijgen kinderen gelegenheid kennis te maken met het uiterlijk, de verschijningsvormen van getallen en daaraan gekoppeld met de functionaliteit ervan. Kinderen onderzoeken dat in concrete, betekenisvolle situaties. Cijfers kunnen er bijvoorbeeld heel verschillend uit zien en kinderen moeten ze kunnen onderscheiden van letters en andere tekens die we in onze schrijftaal gebruiken. Dat dit onderzoek op elk niveau van het getallengebied dient plaats te vinden komt voort uit de specifieke problemen die taal en schrijfwijze oproepen bij het lezen en interpreteren van getallen. Dat 5 groter is dan 3 is voor kleuters niet zo vanzelfsprekend. Dat vijftien niet geschreven wordt als 510 is voor sommige kinderen een hardnekkig misverstand. Dat kinderen in het reguliere basisonderwijs moeite hebben met het lezen en schrijven van getallen als 35 en 53 wordt algemeen aanvaard als een bekend probleem. Dat de telrij na 100 niet verder gaat met 200, 300, enzovoorts, maar dat dan honderd-en-een volgt en dat dit geschreven wordt als 101 en niet als 1001 vraagt speciale aandacht bij de verkenning van getallen. Het lezen, schrijven en op volgorde plaatsen van kommagetallen vormt daarna weer een nieuw struikelblok.



Kinderen zijn al vroeg in staat betekenis te geven aan getallen in hun eigen werkelijkheid (zie afbeelding).
Getallen die zij in hun omgeving tegen komen kunnen ze vaak al wel lezen, maar wat de getallen in die situatie betekenen is nog niet meteen zo duidelijk. Samen discussiëren over

de mogelijke betekenis van wat er staat is een noodzakelijk onderdeel van het verkennen van de context.

2. Verkenning van inhoud en structuur

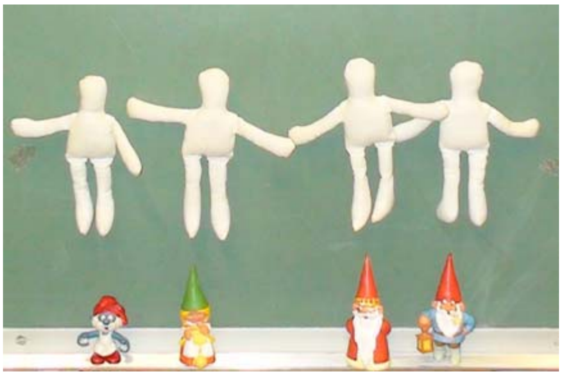
Startend vanuit het uiterlijk en de betekenis van de getallen en hoe en waar je die in je eigen omgeving tegenkomt, wordt de volgende stap gezet: het onderzoek naar de inhoud en de structuur van hoeveelheden. Kinderen onderzoeken hier hun mogelijkheden om structuur aan te brengen in een ongestructureerde werkelijkheid. In eerste instantie is de ongestructureerde werkelijkheid zelf het onderzoeken waard. De ongeordende hoeveelheid snoepjes, knikkers, kinderen, is lastig te overzien en te tellen. Het zijn er te veel, ze blijven niet op hun plaats en het dwingt je om steeds opnieuw één voor één te tellen, zeker als er

iets in de situatie verandert. Deze ervaring is van belang om te ontdekken, dat het een stuk eenvoudiger gaat als je ordening aanbrengt in de voorwerpen die je wilt tellen. Dat ervaren kinderen als ze de eieren uit het mandje verpakken in eierdozen.
Het spel van Robbie de Rover laat kinderen de kracht van structuur op een indringende wijze ontdekken.

Robbie de Rover

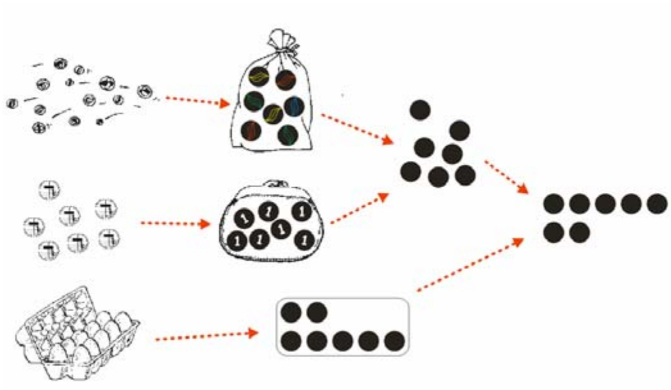
In een schatkist zit een ongeordende hoeveelheid ‘goudstukken’. Tussen 20 en 30 is een geschikte hoeveelheid. Een van de kinderen wordt aangesteld als Robbie de Rover, de schatbewaarder. Hij moet de schat bewaken. Hij mag met de goudstukken doen wat hij wil, als ze maar in de schatkist blijven.
Nu valt Robbie even in slaap (ogen dicht of even omdraaien). We nemen stiekem een paar goudstukken weg. Robbie krijgt vervolgens een paar tellen de tijd om te bepalen hoeveel goudstukken er weg zijn. Na het versje “Robbie Rover zeg eens gauw, hoeveel goudstukken mis je nou?” moet meteen een antwoord komen. Is het antwoord correct, dan mag deze Robbie de Rover blijven. Zo niet, dan mag een ander kind voor schatbewaarder spelen. Dit gaat net zo lang door tot de kinderen spontaan ordening gaan aanbrengen in de goudstukken (in kleine groepjes of in een patroon leggen). De ervaring leert, dat zodra kinderen dit ontdekt hebben, het bijna onmogelijk is om ongemerkt nog goudstukken weg te halen. Het geeft kinderen een geweldig gevoel om greep te krijgen op zo’n onoverzichtelijke hoeveelheid. Het spel is in verschillende varianten te spelen: met dropjes of rond Sinterklaas met pepernoten. Ook nadat de kinderen eenmaal ontdekt hebben, dat het ordenen van de goudstukken meteen overzicht geeft op wat er ontbreekt in het patroon blijft het spel boeiend door te onderzoeken welke patronen wel en welke niet (meer) ‘werken’.

Met materialen de concrete werkelijkheid symboliseren is een noodzakelijke stap in het abstractieproces. Denk aan vingers, kralen, fiches, eierdozen, de stippen op een dobbelsteen. Symboliseren is afstand nemen. Het is het ontdoen van uiterlijkheden en van niet relevante eigenschappen. Op dit punt worden soms door kinderen andere relaties gelegd dan verwacht. Bij het uitspelen van het bekende busverhaal, waarbij kinderen bij verschillende haltes in- en uitstappen en waarbij de ‘chauffeur’ het aantal passagiers in de bus moet bijhouden is het voor sommige kinderen belangrijker, dat een vriendje of vriendinnetje mee mag in de bus, dan de vraag hoeveel passagiers er zijn ingestapt. Het isoleren van het hoeveelheidsbegrip in een dergelijke context gaat niet vanzelf.

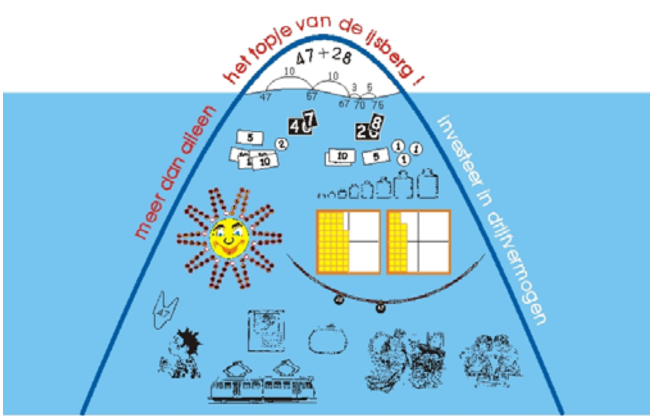


Dat twee en twee hetzelfde is, laat je niet zomaar zien door twee kabouterpoppetjes naast twee andere kabouterpoppetjes te plaatsen. Een dergelijke vergelijking deugt pas als je de kabouters terugbrengt tot ‘poppetjes’. De kabouters zelf verschillen onderling veel te sterk (kleine en grote kabouter; man en vrouw; rode puntmuts en gele puntmuts om door de leerlingen als gelijkwaardig verondersteld te worden. Leerlingen kunnen de vergelijking totaal anders interpreteren.

Als een dergelijke interpretatie van de context niet zichtbaar wordt, ontstaan er misverstanden. Goed luisteren en kijken naar de reacties van kinderen, oog hebben hun eigen interpretaties van de situatie is daarom belangrijk. Maar bovenal gaat het erom te weten waar je mee bezig bent om samen met de leerlingen bewust het abstractieproces te doorlopen. Dat, in combinatie met een open, onderzoekende houding, is het didactische vakmanschap dat je als leerkracht nodig hebt.



Kinderen moeten kunnen ervaren, dat het voor het rekenen niet uitmaakt of je 7 kinderen, 7 eieren, 7 toffees of 7 knikkers hebt. Om dat inzicht te ontwikkelen helpt het om een tussenstap in te bouwen. Dat kan door de echte voorwerpen te symboliseren, door bijvoorbeeld te laten tekenen of te laten vervangen door een fiche, een blokje of iets dergelijks. Het wordt daarmee een soort abstracte eenheid, die van alles kan voorstellen. Het mooie van zo’n symbolisering is dat je de kracht van bijvoorbeeld de eierdoosstructuur (2 rijen van 5) ook kunt gaan gebruiken voor andere dingen. Het zwarte rondje kan immers van alles zijn.



Met modelleren bedoelen we het ‘in vorm brengen’, het ‘omkneden’ naar een vorm of structuur, die de essentie van getallen blootlegt en perspectief biedt voor het rekenen. Van de vele structuren die er bestaan bij het rekenen tot 10 en tot 20 zijn uiteraard de 5- en de 10-structuur het meest perspectiefrijk. Die structuur vind je zowel in handen en eierdozen als in een rekenrek of kralensnoertje. Wat voor deze modelstructuren geldt, geldt ook voor getallen. Het model maakt zichtbaar wat in getallen verborgen blijft.

Voor de verkenning van de inhoud en de structuur van het getallengebied tot 100 zijn er weer meer en andere mogelijkheden: het kralensnoer, de getallenslang, het zonnespel, het goudbord, allerlei meetinstrumenten, geld, enzovoorts. Ze geven kinderen de gelegenheid de inhoud en de structuur van het getallengebied tot 100 te onderzoeken. Dat wordt weergegeven in de ijsberg hiernaast.
In deze fase van het leerproces doen kinderen wezenlijke ontdekkingen wat betreft wiskundige eigenschappen en patronen. Ook hier ervaren kinderen AHA-momenten.

Meten met een kralensnoer[6]

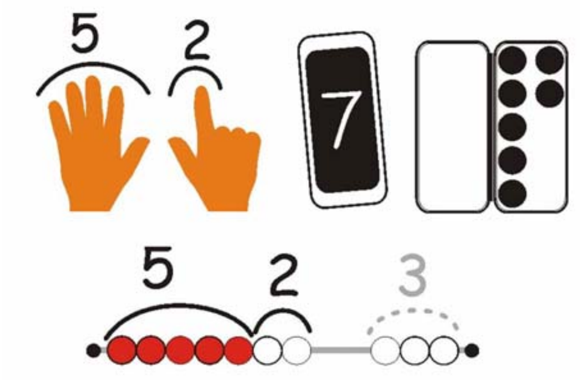
In het verlengde van het spel van Robbie de Rover krijgen kinderen de opdracht zelf een kralensnoer te ontwerpen, waarin verschillende kleuren verwerkt kunnen worden. De kinderen krijgen in tweetallen een flinke hoeveelheid kleurige kralen en een nylondraad. Daarmee maken zij hun eigen kralensnoer. Zo lang zij willen, in de kleuren die ze zelf kiezen en in de volgorde die zij willen.

Het werken in tweetallen stimuleert het overleg over de keuzes die ze maken. Wellicht is het mooier of handiger om steeds groepjes van 2 of 4 of 6 of 8 te maken, of eerst alle rode en dan alle blauwe… Het mag allemaal. Maar het wordt vooral interessant als er gemeten moet worden. Eerst aan het eigen lichaam, dan voorwerpen uit de klas en ten slotte wat vrije opdrachten. Door met een ongestructureerd kralensnoer de spierballen van twee kinderen te meten wordt er geteld en worden de uitkomsten vergeleken. Dat tellen is nog te doen bij kleine hoeveelheden, maar het wordt frustrerend als bijvoorbeeld de lengte van je arm of de omvang van je middel gemeten moet worden.
Na enige tijd worden de resultaten van de verschillende tweetallen vergeleken. Het valt op dat sommige groepjes snel klaar zijn met tellen en anderen veel tijd nodig hebben. In het gesprek blijkt, dat patronen in de kralen je kunnen helpen bij het tellen. Patronen met regelmatige herhaling van 2, 4 of 6, maar vooral met 5 en 10 verkorten het tellen. Bij het meten van grotere lengtes, zoals de hoogte van de deur of de lengte van het bord blijkt een kralensnoer van 100 wel een handige lengte. Als er een paar dagen later weer nieuwe kralensnoeren gemaakt worden, blijken de kinderen andere keuzes te maken. De 5- en de 10-structuur komt niet meer uit de lucht gevallen.

De structuur van getallen tot 100 onderzoeken kinderen met behulp van de rekentafel.
In een context waarin betaald wordt met goudstukken is een hulpmiddel ontwikkeld waarmee hoeveelheden snel te overzien zijn, zelfs als een deel van het ‘goud’ aan het oog onttrokken wordt. De decimale structuur geeft voldoende houvast. Kun je herleiden hoeveel goudblokken er links op de rekentafel liggen?

Voor de verdere verkenning van de telrij (het tweede – ordinale – spoor, waar het gaat om plaats en volgorde van getallen) krijgt de getallenslang een plaats. Uiteraard staat in dit spel opnieuw de decimale structuur centraal, die spelenderwijs wordt verkend. Sprongen maken, voorspellen waar je uitkomt, wat moet je gooien om op een tienvoud te komen, hoe kun je de ander van het spelbord afgooien zijn gerichte reflectiemomenten tijdens het spelen.

Kinderen raken vertrouwd met de structuur van de telrij door specifieke oefenmomenten, zoals getallen bedekken, getallen plaatsen; sprongen van 10 maken; sprongen van 9, enzovoort,.
De kunst van een goede didactiek is de juiste timing te vinden voor het moment waarop kinderen toe zijn aan bepaalde ontdekkingen en kinderen met het juiste didactische gereedschap op weg te helpen.

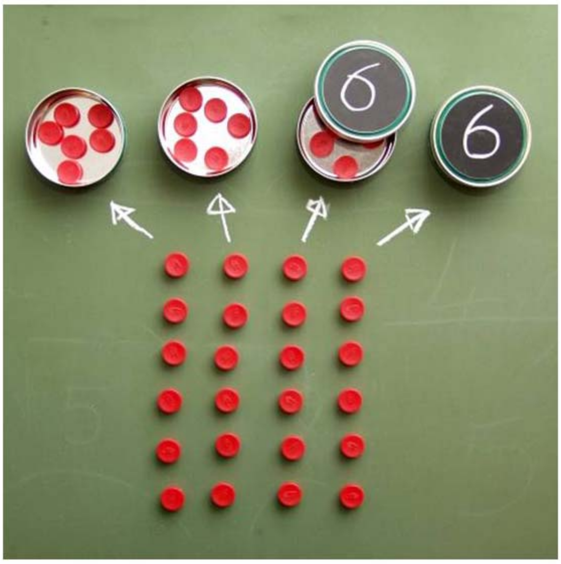


3. Werken met getalrelaties

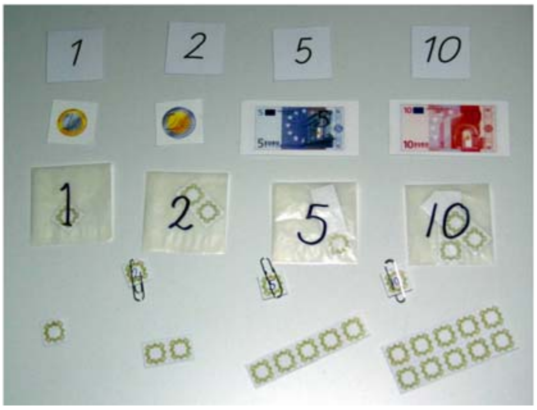
De meest basale manier om een aantal te bepalen is één voor één tellen. Naarmate kinderen in de voorafgaande fase ervaringen hebben opgedaan met aantallen en structuren, leren ze hun manier van tellen te verkorten. Ze herkennen bepaalde getalbeelden in één oogopslag: een volle hand wordt direct herkend als 5. Ook samenstellingen van verschillende getalbeelden worden direct gezien: 7 als 5 en 2 of 7 als 3 minder dan 10. Er ontstaan grotere getallenbouwstenen en er ontwikkelt zich een gevoel voor relaties tussen deze bouwstenen. Op den duur heeft een kind de echte vingers, kralen of stippen niet meer nodig. Het weet dat 7 eruit ziet als 5 en 2 en dat 8 op 2 na 10 is. Op dit niveau is het abstractieproces al zo ver gevorderd, dat concrete hoeveelheden niet meer één voor één telbaar aanwezig hoeven te zijn. Kinderen kunnen hier hoeveelheden en getallen zien als een samenstelling van andere getallen. Als het nu gaat over 7 eieren, knikkers of appels, dan kan 7 worden gezien als een groepje van 5 en een groepje van 2, of als 3 minder dan 10 of als een groepje van 4 en 3, maar zo nodig ook als 1 meer dan 6 of 1 minder dan 8.
Dat wil nog niet zeggen, dat kinderen in deze fase geen materiële ondersteuning meer nodig zouden hebben. Integendeel. Het gaat hierbij om overtuigende transfer en koppeling aan eerder verworven aspecten van getalbegrip. Een goed voorbeeld daarvan zijn de magnetische eierdozen (Structin).

In de dozen passen 2 x 5 grote magneten in de structuur van de eierdoos, maar dan ontdaan van 'de eierlucht'. De magneten kunnen van alles voorstellen. De doos heeft een deksel waarmee de magneten verborgen kunnen worden. Het deksel is beschrijfbaar. Zet je twee dozen, bijvoorbeeld 7 en 8 zo naast elkaar en vraag je de leerlingen om te bepalen hoeveel 8 en 7 samen is, dan ben je in staat om op een subtiele manier een stapje terug te zetten: zullen we nog eens kijken hoe die 8 er uitziet? De doos gaat open, de leerling ziet dat er nog 2 bij kunnen en kan daarmee een strategie toepassen: 8+2+5. Mocht het opsplitsen van 7 een probleem zijn, dan kan ook de tweede doos worden geopend. Uiteindelijk kan de oplossing zelfs letterlijk worden uitgebeeld.

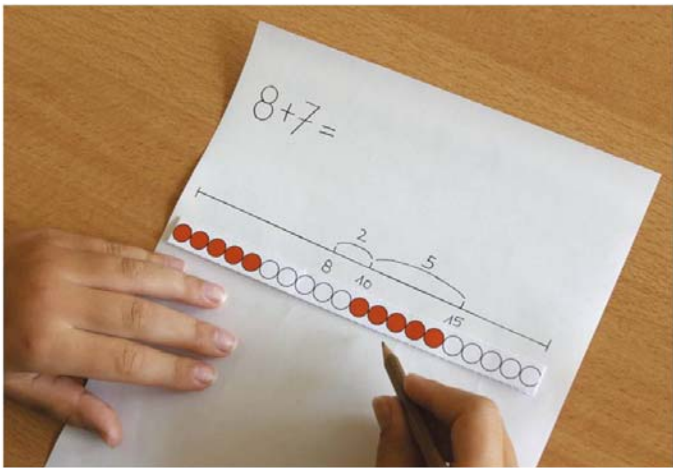
De mogelijkheid om te switchen van niveau noemen we 'didactische gelaagdheid'. Het helpt leerlingen vertrouwen te krijgen in getallen. Met name de overgang van de tweede naar de derde fase vraagt om een zorgvuldige afbouw van controleerbare (telbare) representaties van getallen naar 'kale' getallen.
Hieronder een voorbeeld uit het domein vermenigvuldigen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van doosjes met beschrijfbare deksels [(Magbox)]() .
Onderstaande afbeelding zou de indruk kunnen wekken, dat dit in één stap te leren is, maar elke overgang vraagt om gevarieerd oefenen en vooral om het opbouwen van zelfvertrouwen bij de kinderen om ook zonder de controle van het concrete beeld op de getallen te kunnen rekenen.



Kinderen moeten hier leren, om te durven vertrouwen op hun nieuw verworven kennis om zonder tellen, zonder controle te kunnen werken met getallen. Materialen als Magbox, Structin, magneetplaatjes, de (lege) getallenlijn kunnen hier ingezet worden als ondersteuning. Het dekseltje van de Magbox kan er nog wel even af om te controleren, maar heb je dat nog elke keer nodig?

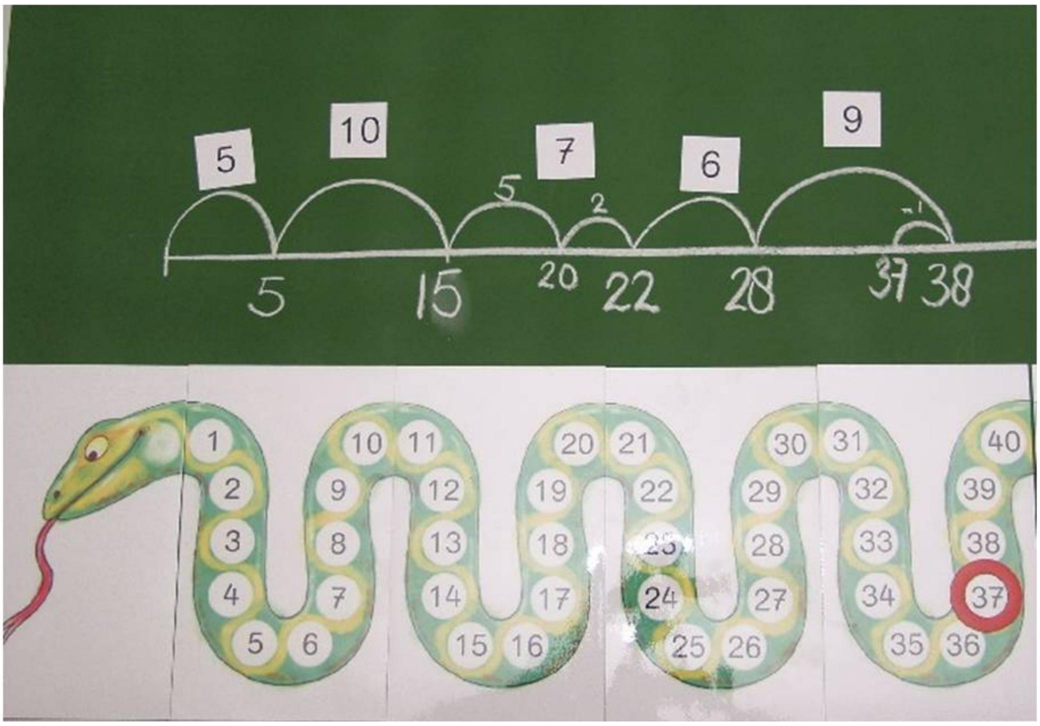


Geld is een betekenisvol en natuurlijk modelmateriaal en kan in deze fase als een belangrijke bruggenbouwer worden ingezet. Enerzijds om betekenis te geven aan het werken met getallen: met geld kun je immers van alles kopen. Anderzijds omdat de structuur van het stelsel van muntwaarden (1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 enz.) ook de bouwstenen representeren voor het werken met 'kale' getallen. Met gepast betalen, teruggeven en wisselen krijgen de bouwstenen een praktische betekenis. Ook maten en gewichten kunnen als zodanig gebruikt worden om getallen op 'bouwsteenniveau' te leren hanteren. Het bouwsteenniveau is een semi-formeel niveau. Getallen zijn dragers van de inhoud geworden. In die zin is het formeel. Maar er komen nog geen sommen aan te pas. De basis wordt gelegd voor handige rekenstrategieën door het 'stoeien' met bouwstenen door aanvullen, weghalen, splitsen en samenvoegen van structuren en patronen.



Uitgebreid oefenen is hier van grote betekenis. Dat oefenen dient dan wel gepaard te gaan met geregelde reflecties en onderlinge uitwisseling van verschillende varianten waarin ‘bouwstenen’ worden gebruikt.
Een belangrijk onderdeel in deze fase en tevens overgang naar de bovenste laag vormt het ontwikkelen van notatievormen. Rekenbewerkingen worden op een steeds formeler niveau beschreven. Er worden notatievormen gezocht, zoals de getallenlijn, waarop de rekenhandelingen nog concreet zichtbaar zijn met sprongen en pijlen, maar waar verder alleen getallen worden gebruikt.

Een mooi voorbeeld daarvan vinden we in het leertraject over de getallenslang.



Nadat het spel enige tijd puur als spel is gespeeld, wordt de vraag gesteld wie nog weet hoe het spel is verlopen. Dat leidt tot de noodzaak om het spelverloop op papier bij te houden. Op een lege getallenlijn boven de slang worden de stappen genoteerd. De getallenlijn is in eerste instantie een verslagleggingsmodel. Al snel wordt echter het spel gespeeld op de lege getallenlijn en is de Getallenslang zelf alleen nog controlemiddel. Ook hier is vooral de transfer van belang. Modellen / notatievormen krijgen daarmee hun betekenis

4. Formele opgaven

Uiteindelijk worden rekenbewerkingen weergegeven in formules, waarin ook de bewerkingen alleen nog met symbolen worden uitgebeeld. Daarmee zijn we in de vierde en laatste fase beland. We noemen de eerste drie niveaus het drijfvermogen. Kinderen hebben hier alles geleerd over getallen en bewerkingen, behalve er op formeel niveau mee opereren. Het niveau van de formele opgaven noemen we het topje van de ijsberg. In deze fase vindt het automatiseren en zo nodig (rekenen tot 20, tafels en deeltafels) ook het memoriseren plaats.

Als het proces goed is verlopen, kunnen de leerlingen hier gebruik maken van de bouwstenen (de rijk gevulde getallen) en effectief gereedschap (rekenvaardigheden). Waar de getallen 47 en 28 ook voor staan is nu niet meer van belang. Het kan van alles zijn: koekjes, auto’s, stoelen, huizen, kinderen, elke denkbare hoeveelheid kan in een getal ‘gevangen’ worden. Met de kennis van de bouwstenen kunnen de kinderen verschillende bewerkingen met de getallen uitvoeren.

Als ook de gereedschapskist goed is gevuld, hebben de leerlingen genoeg passende hulpmiddelen om een bruikbare aanpak te vinden. Die gereedschappen: (verkort) tellen, uitschrijven op de getallenlijn, handig splitsen en samenstellen of het inzetten van gestileerde cijfertechnieken, maar ook geautomatiseerde en gememoriseerde kennis uit andere domeinen.
Samen met andere kinderen wordt gezocht naar wat het handigst of het snelst werkt. Zo nodig grijpen we terug op uitgebreidere beschrijvingen van het denkproces, maar in deze fase gaat het vooral om verkorten en versnellen. Er zijn geen zichtbare inhouden of hoeveelheden meer. Kinderen werken hier met strategieën op somniveau.
Oefenen was in de traditionele didactiek vooral gericht op het topje van de ijsberg. Het onderscheiden van de gelaagdheid in de ijsberg maakt zichtbaar, dat oefenen ook in eerdere fasen van het leerproces noodzakelijk is. In het PARWO-project worden daar rijke leeromgevingen voor ontworpen en passende didactische materialen bij ontwikkeld.
Voor alle leerlingen!

[1] De term 'leerlandschap' wordt uitgebreid beschreven en toegelicht in het artikel van C.Fosnot en M.Dolk: Het leerlandschap, in Panamapost, jrg. 21, nr.2, p. 29-37

[2] Voor een definitie van gecijferdheid verwijzen wij naar de beschrijving van de karakteristiek van rekenen en wiskunde in de kerndoelen (OCW)
'Wiskundig geletterd' en gecijferd betreft onder andere samenhangend inzicht in getallen, maatinzicht en ruimtelijk inzicht, een repertoire van parate kennis, belangrijke referentiegetallen en -maten, karakteristieke voorbeelden en toepassingen en routine in rekenen, meten en meetkunde.
Meer informatie over het begrip gecijferdheid is te vinden op www.gecijferdheid.nl

[3] Zie: Boswinkel, N. en Moerlands, F.J. (2003) – 'Het topje van de ijsberg.'
In:K. Groenwegen (red.), Nationale rekendagen 2002, een praktische terugblik.
Utrecht: Freudenthal Instituut.

[4] Zie het artikel 'Quickscans met de Parwo Matrix' in volgens Bartjens, jrg.28, nr. 2

[5] We beperken ons in dit kader tot getalbegrip en het rekenen tot 100; de meeste zaken gelden ook voor de andere domeinen.

[6] Zie het artikel 'Meten met kralen' , in JSW, jrg. 90, juli 2006