PANAMA-POST

Evi en de rekentafel

- een overwinning op een rekenachterstand -

D. van der Straaten & L. Moerlands
PARWO, Eindhoven

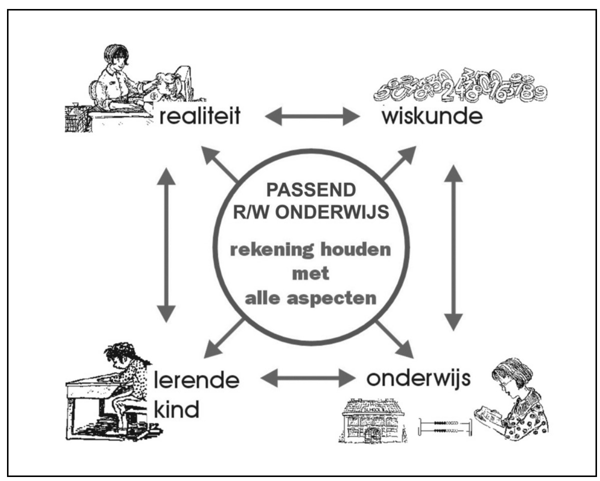
Dit artikel beschrijft de begeleiding van een kind met rekenproblemen vanuit een ontwikkelingsgerichte didactiek beschreven. De auteurs laten zien dat bij het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde rekening gehouden dient te worden met enkele aandachtsgebieden. Deze lichten zij toe aan de hand van ervaringen die zij in het PARWO-project hadden. Vanuit deze aandachtsgebieden wordt een aanzet gegeven om de gebruikelijke werkwijze van diagnosticeren en remediëren te vervangen door 'zicht krijgen op een gezonde ontwikkeling bij kinderen'. Als deze ontwikkeling in beeld is, blijkt dat het doorstoten naar volgende domeinen in het rekenonderwijs snel kan verlopen, omdat het kind in staat is terug te vallen op een breed ontwikkeld inzicht. Zij lichten de daarvoor ontwikkelde didactiek toe en zij geven daarmee een aanzet voor een nieuw perspectief

1 Inleiding

Een kind in de klas dat niet mee kan komen met rekenen, is voor iedere leraar herkenbaar. Evi is zo'n leerling, uit groep 4 van een reguliere basisschool, waarvan de ontwikkeling hier wordt beschreven. Als intern begeleider (IB) van deze school heeft Lucy Moerlands de taak Evi extra steun op rekengebied te bieden. Lucy is naast haar rol als IB'er nauw betrokken bij het PARWO-project[1] (Moerlands, Van der Straaten & Van der Straaten, 2008; Van der Straaten & Moerlands, 2009). Zij heeft in de begeleiding van Evi gehandeld vanuit de PARWO-visie. Ze heeft tevens aandacht geschonken aan bijpassende ideeën over leren in meer algemene zin (Vermeulen, Moerlands, & De Wert, 2008). In dit artikel geven we een beeld van die begeleiding en van de ontwikkeling die Evi doormaakte. Daarnaast geven we een theoretische inbedding van de achter het PARWO-project liggende gedachten en de gebruikte materialen.

2 PARWO

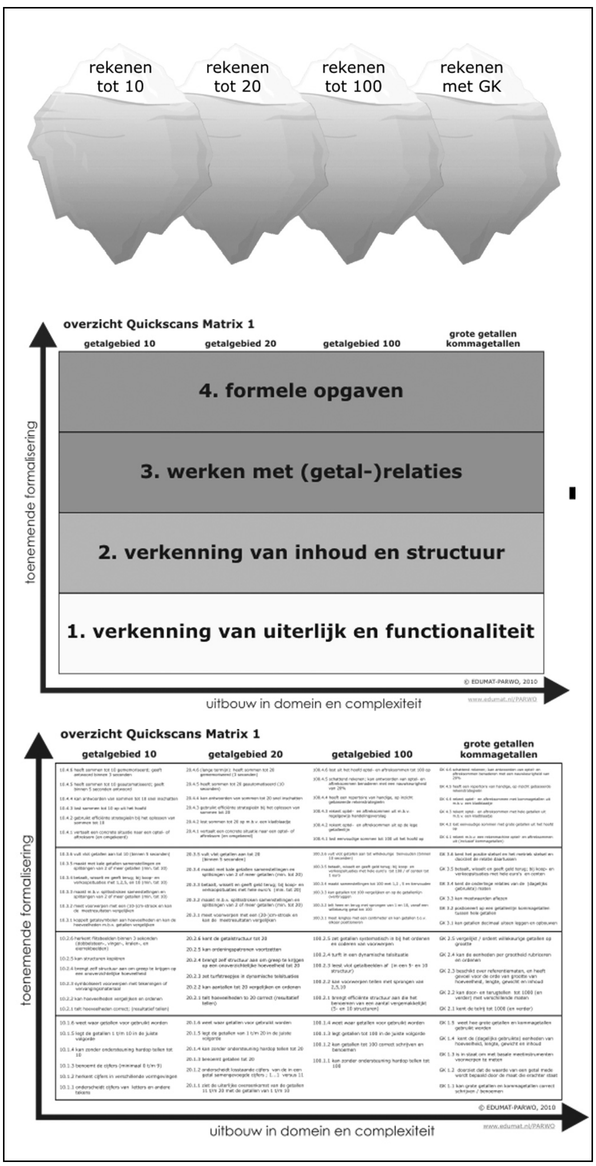
Eerst schetsen we kort enige typerende elementen die van belang zijn voor een beter inzicht in het project en haar visie. Een van de aannames in het PARWO-project is dat een leerling, zoals Evi, niet gezien wordt als een kind met een rekenprobleem, maar als een kind in ontwikkeling. De vraag hoe daar op kan worden ingespeeld, staat voorop. Het valt niet te ontkennen dat Evi moeite heeft om de ontwikkeling van de 'gemiddelde' leerling in haar klas op het rekengebied bij te benen. Dit vormde immers een reden om haar extra te begeleiden. Om een kind in ontwikkeling op dit gebied te volgen, is het dan ook zinvol om verschillende aandachtsgebieden te belichten die daarbij een rol spelen. Deze aandachtsgebieden zijn van belang omdat het lerende kind niet los gezien kan worden van de context waarin het leert. Daarom spelen de realiteit, het onderwijs en de (wiskundige) inhoud voor het lerende kind een belangrijke rol.



figuur 1: de aandachtsgebieden

3 De wiskunde

Ook Freudenthal betoogde dat het kind niet los gezien kan worden van de realiteit, het onderwijs en de wiskunde. Hij zag de wiskunde niet als een kant en klaar geheel van regels dat zo in de hoofden van kinderen gegoten kon worden. Hij was van mening dat wiskunde als kennisgebied door de lerende zelf gecreëerd zou moeten worden. Hij stelde zich daarbij voor dat kinderen, begeleid door de leraar, de wiskunde zouden (her)ontdekken. Daardoor wordt wiskunde gezien als een activiteit die een kind onderneemt om greep te krijgen op de (wiskundige aspecten van de) wereld om hem heen. Binnen het PARWO-project wordt de weg naar abstractie voor zowel het kind als de leraar zichtbaar gemaakt. Er wordt aangesloten bij de realistische didactiek door voor kinderen herkenbare en handzame voorbeelden, handvatten, materialen en gereedschappen te bieden. Dit uitgangspunt vinden we terug in de ijsbergmetafoor[2] (Boswinkel & Moerlands, 2003). De metafoor werd in het PARWO-project ‘doorvertaald’ naar matrices[3] voor het rekenonderwijs, zoals in de figuur 2 is te zien.



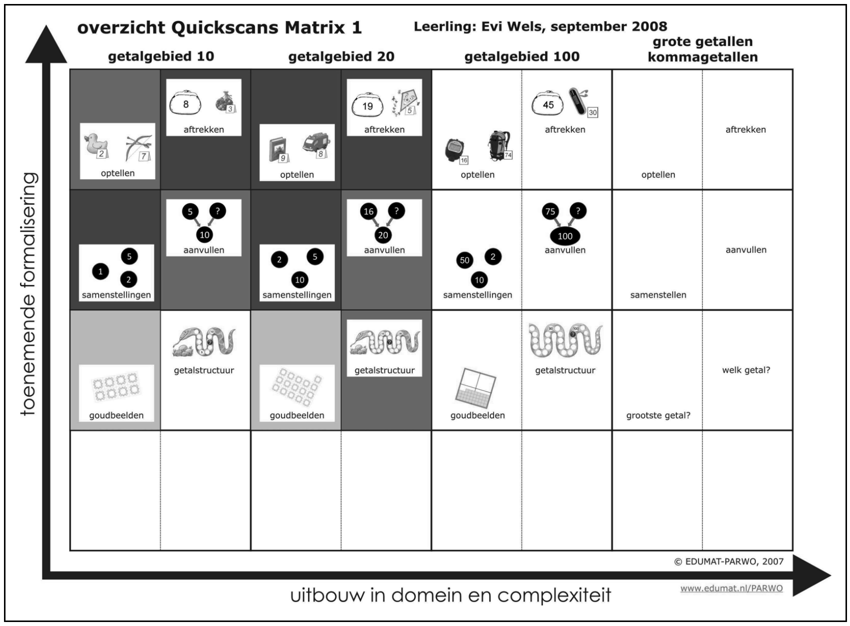
figuur 2: ijsbergen vormen samen een gelaagde matrix, met onderliggende competenties

4 Uitgangspunten van PARWO-onderwijs

De matrices geven een kader waardoor de leraar zicht wordt geboden op verschillende wiskundige abstractieprocessen die er per domein, door middel van competenties, in beschreven worden. Het geheel is vergelijkbaar met het leerlandschap, zoals Fosnot en Dolk (2000) dat beschreven. De door kinderen af te leggen route wordt niet van te voren vastgelegd, maar is wel in dat landschap te plaatsen. De competenties in de matrix zijn te typeren als de ‘bakens’ in het landschap. Een verschil tussen de matrix en het leerlandschap is dat de lagen van de matrix abstracties meer prominent in beeld zijn. Deze lagen van abstractie zijn overigens in overeenstemming met de ‘vier niveaus van betekenisvol handelen’, zoals Gravemeijer (1994, 2000, 2002) beschreef. De verkenning van uiterlijk en functionaliteit (laag 1 in de matrix) verhoudt zich bijvoorbeeld met ‘het niveau van de context’ van Gravemeijer (2000). Op het moment dat vanuit deze ‘realiteit’[4] kinderen wiskundige abstracties gebruiken, doen ze dat op een manier die verwijst naar de situatie waaruit de behoefte tot abstractie is ontstaan. In de matrix benoemen we dat als verkenning van inhoud en structuur (laag 2). Gravemeijer duidt dit aan met het ‘verwijzend niveau’. Op het moment dat hij spreekt van het ‘algemeen niveau, waar wiskundige aspecten van de oplossingsmethoden de plaats innemen van de betekenissen in termen van de context’, spreken wij in de matrix van ‘het werken met getalrelaties’ (laag 3). In deze derde laag komen getallen los te staan van verschillende contexten en vormen ze bouwstenen voor ‘formele opgaven’ (laag 4 in de matrix en ‘het formele niveau’ volgens Gravemeijer).

5 Tools voor de leraar

Abstracte wiskundige kennis is dus een eindproduct en geen uitgangspunt. Leraren zullen moeten didactiseren. Ze doorlopen zelf een vergelijkbaar proces als kinderen doen (Dolk, Den Hartog & Gravemeijer, 2002; Dolk, 2004). Het zicht krijgen op achterliggende ideeën van een bepaalde benadering, zoals de realistische rekendidactiek, wordt met dergelijke theorieën wel ondersteund, maar dienen vertaald te worden naar voorbeelden, materialen en gereedschappen waarmee een leraar in staat wordt gesteld om het proces van didactiseren vorm te geven.
Binnen het PARWO-project zijn verschillende voorbeelden[5] ontwikkeld, waarmee een aanzet wordt gegeven waardoor leraren hun ‘onmiddellijk onderwijsgedrag’ (Dolk, 1997) aan kunnen laten sluiten bij de realistische benadering van rekenonderwijs. Leraren moeten



figuur 3: quickscan-resultaat voor Evi (september 2008)

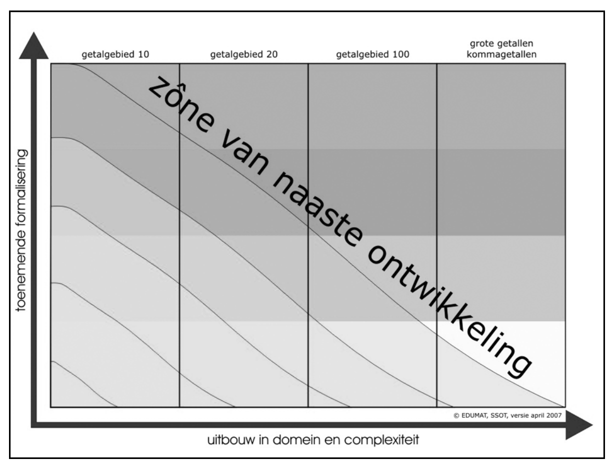
dan ook het idee hebben dat ze iets in handen hebben waarop ze kunnen vertrouwen. Een eerste stap daarin is om zich een beeld te vormen van de gewenste ontwikkeling van kinderen op rekengebied. Daarvoor bieden de zogenoemde quickscans (Moerlands, Van der Straaten, & Van der Straaten, 2008) een mogelijke ingang. Zo zijn er bij Evi quickscans afgenomen, waarvan de resultaten in figuur 3 zijn weergegeven. Bij een score van 9 of 10 goede antwoorden op 10 opgaven in de quickscan, wordt het betreffende onderdeel groen gekleurd, bij 7 of 8 goede antwoorden oranje en bij 6 of minder goed, rood.[6]

6 Het lerende kind Evi

Uit de resultaten kan worden geconcludeerd dat Evi een aantal zaken op formeel niveau van getalrelaties in voldoende mate beheerst, maar dat het daar onderliggende ‘drijfvermogen’[7] niet goed gevuld is. Een oorzaak daarvoor kan zijn dat in remediërende lessen vaak is geprobeerd Evi het rekenen in abstracte vorm te laten oefenen. Het gevaar hiervan is dat er voor haar een vervreemding van de realiteit ontstaat en er een apart soort schoolse rekenkunde wordt gecreëerd.

> Het rekenen op school wordt ervaren als het hanteren van formele regels en procedures, die betekenis missen en op geen enkele wijze verband lijken te houden met hetgeen de kinderen buiten school doen.
> (Gravemeijer & Van Eerde, 2004, pag.8).

De kunst is om kinderen de rekenkunde die aan bod komt als ‘echt’ te laten ervaren en er daarbij voor te zorgen dat elke stap naar abstractie ondersteund wordt met de mogelijkheid om terug te grijpen op een lager niveau van abstractie. Zodoende zal de wiskundige ontwikkeling van een kind, zoals Evi, moeten lijken op een vloedlijn die over de matrix vloeit (fig.4).



figuur 4

Dit is in tegenstelling tot de nadruk op- en een start vanuit formele regels en procedures, waarbij het gevaar bestaat dat er geen ondersteunende kennis wordt opgebouwd en dat de ontwikkelde wiskunde niet opgebouwd is vanuit een constante relatie met de realiteit. ‘Mathematics education should start and stay within reality’, zegt Gravemeijer (2004), waarbij hij aan Freudenthal refereert. Het begrip ‘reality’ dient hierin steeds opgevat te worden vanuit het perspectief van het kind (Gravemeijer, 2004; Gravemeijer & Van Eerde 2004), van wat het ‘gezond verstand’ van het kind dus ervaart als werkelijkheid. De kennis die slechts bestaat uit formele regels en procedures, aangedragen door anderen, die niet verbonden is met de eigen informele kennis van kinderen kan, zoals gezegd, in een later stadium - waar de regels en procedures complexer worden - ineen storten. Met het gebruik van quickscans wordt zichtbaar gemaakt wat er in de rekenkundige ontwikkeling van Evi niet soepel verloopt. Daardoor is in kaart gebracht welke factoren hierbij een rol spelen. Vervolgens is er een plan opgesteld om Evi's groei weer 'gezond' te laten verlopen. Hierbij wordt dus stevig geïnvesteerd in het 'drijfvermogen' en wordt bij elke stap aansluiting gezocht bij de reeds aanwezige kennis van Evi, zodat het beeld meer zal overeenstemmen met de genoemde vloedlijn op de matrix. Een leertraject dat hierin een belangrijke aandeel heeft gehad, is 'de herontdekking van geld'. Dit heeft veel eigenschappen die de ontdekking van de decimale getalstructuur kunnen ondersteunen. We lichten dit toe.

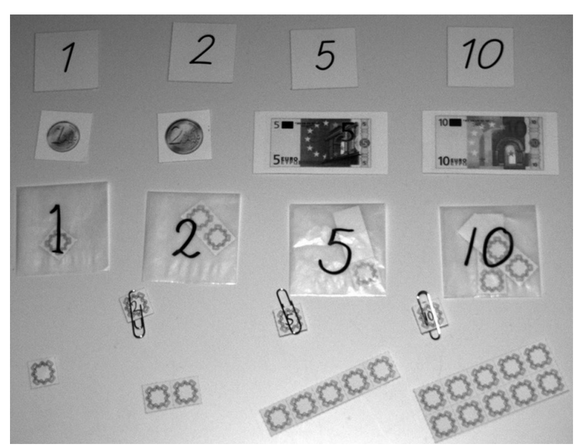
7 De realiteit - de (her)ontdekking[7] van geld

Het is zinvol om na te gaan hoe belangrijke stappen in de rekenkundige ontwikkeling zijn gezet. Fosnot en Dolk (2000) typeren deze stappen als *big ideas*. Een voorbeeld van zo'n *big idea* is het (her)ontdekken van de getalstructuur van geld. Een *big idea*, waarmee we kinderen in Madeline's klas zagen worstelen, was het *unitizing* of 'bundelen', nodig om plaatswaarden te begrijpen: tien objecten worden samengenomen tot één tien. Dit veronderstelt dat kinderen niet alleen objecten, maar ook groepen tellen en daar ook tussen kunnen wisselen. Het geheel wordt dan gezien als een groep van een aantal dingen. De delen samen worden de nieuwe eenheid en de delen (de objecten in de groep) en het geheel (de groep zelf) kunnen tegelijkertijd beschouwd worden. (Fosnot & Dolk, 2000).

In dit leertraject nemen we de ontstaansgeschiedenis van geld als uitgangspunt om kinderen getalstructuren te leren. We starten met ruilhandel, waarbij voor kinderen (door dit aan den lijve te ondervinden) duidelijk wordt dat een gemeenschappelijke afspraak over de waarde van voorwerpen handig is om het 'ruilen' eerlijk te laten verlopen. Hier doet 'bladgoud' zijn intrede als universeel ruilmiddel, waarmee de eerste abstractie in wezen al is gemaakt. Kinderen ruilen voorwerpen niet alleen, maar ze 'betalen' ervoor met bladgoud. Het bladgoud heeft als voordeel dat - mits algemeen geaccepteerd - door er meer of minder van te nemen, alles gepast kan worden betaald. Dit lost een probleem op dat met het ruilen van voorwerpen nogal eens aan de orde is: een schaap ruilen tegen een koe zal voor de koeienbezitter niet als een goede ruil beschouwd worden, maar twee schapen voor diezelfde koe zal misschien voor de schapenbezitter weer onacceptabel zijn. Als intermediair biedt 'goud' (en later ook (papier)geld) hiervoor een oplossing (fig.5).

figuur 5: kinderen kopen voorwerpen met bladgoud

Als 'bladgoud' als betaalmiddel is geaccepteerd, kan een winkelcontext gecreëerd worden waar kinderen voorwerpen met een bepaalde waarde kunnen kopen met bladgoud. Een goede start is om kinderen een strook van 10 stukken bladgoud te geven, waarmee ze voorwerpen (met een waarde van 1 t/m 10 stukken bladgoud) gaan kopen. Zo oefenen ze op een subtiele manier al een aantal getalsplitsingen. Op het moment dat de strook bladgoud echter losgescheurd is in allemaal losse stukjes goud, wordt het vervelend om steeds maar alles te moeten tellen. Er doet zich dan een noodzaak voor tot een volgende abstractie. Het is handig om losse stukken bladgoud te gaan structureren. Kinderen bedenken handige structuren bij de hoeveelheden die ze (nodig) hebben, om zo niet steeds alles opnieuw te hoeven tellen.Een volgende stap is dat het ruilmiddel 'goud'[8] op een gegeven moment werd vervangen door waardepapier en later door bankbiljetten. Er werd in feite afstand genomen van een 'gewichtige' waarde van goud naar een symbolische waarde, namelijk van goud uitgedrukt in munten en bankbiljetten. Deze ontdekking doen kinderen ook door het goud in zakjes te bundelen en op een zakje te schrijven wat er in zit. Dit is vergelijkbaar met de overgang van concreet telbare hoeveelheden naar een abstract getal (fig.6).



figuur 6: telbaar bladgoud wordt vervangen door ingepakte abstracte getallen

Het is noodzakelijk aan te sturen op de getallen 1, 2, 5 en 10, omdat daarmee alle andere hoeveelheden zijn samen te stellen. Als vervolgens dezelfde koop- en verkoopsituaties uitgevoerd worden met de ingepakte hoeveelheden bladgoud, worden deze geoefend, waardoor uiteindelijk slechts een beschrijving van de koop- en verkoopsituaties in sommentaal resteert. Gravemeijer schrijft:

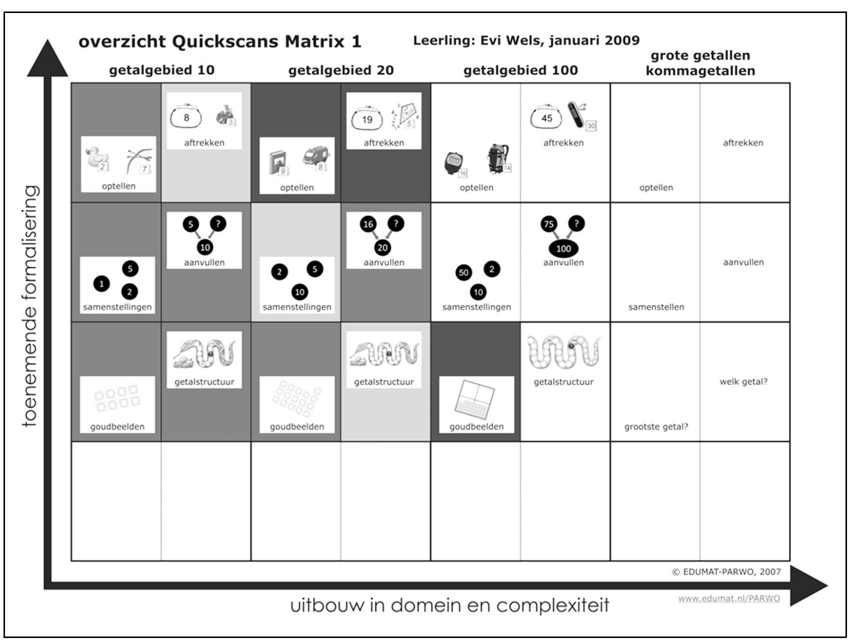
> In eerste instantie wordt er bij dit rekenen met benoemde getallen gewerkt; het gaat om ‘vier knikkers’ en ‘drie knikkers’, niet om ‘vier’ en ‘drie’. De vraag: ‘Hoeveel is vier en drie?’, heeft voor heel jonge kinderen nog geen betekenis wanneer de getallen nog niet zijn losgemaakt van benoemde eenheden. Wanneer we ‘4 + 3 = 7’ schrijven, werken we met getallen die een op zichzelf staande betekenis hebben. Deze getallen zijn in feite generalisaties van tal van situaties waar allerlei zaken als teleenheid worden gebruikt. De getallen hebben nog steeds een kwantitatieve betekenis, dit in tegenstelling tot de getallen in de abstracte rekengetallenwereld die ik zojuist schetste.
> Natuurlijk wordt die kwantitatieve betekenis niet altijd meegedacht. Vier plus drie is zeven, is op een gegeven moment een weetje geworden. En zelfs als we ‘6 + 7’ uitrekenen als ‘6 + 4 = 10’ en ‘10 + 3 = 13’, hoeven we niet per se aan hoeveelheden te denken. Maar ik acht het wel essentieel dat die ondergrond er is, zodat: (a) de getallen in principe betekenis hebben en het rekenen niet louter bestaat uit het manipuleren van symbolen, en (b) de leerlingen iets hebben om op terug te vallen. Met een Engelse term kun je die ondergrond beschrijven als *imagery*; een beeld waar de symbolisering naar verwijst. Dit beeld betreft niet alleen een visueel beeld, maar omvat de hele situatie - in dit geval de situatie, of situaties, van het handelen - met hoeveelheden.
> (Gravemeijer, 1998 pag.44-45)

Het belang om in het begin van een leertraject - als het werken met getallen nog niet als automatisme beheerst wordt - terug te mogen vallen op het telbare aspect van het bladgoud (in de met getallen beschreven zakjes), is evident. Pas als diat verworven is en verschillende getalrelaties grondig zijn verkend, zullen de ‘getalsymbolen voldoende betekenis hebben’ en kunnen de kinderen daadwerkelijk ‘ergens op terugvallen’.

Aan Evi werd in eerste instantie, samen met drie andere kinderen, een RT-traject aangeboden, waarbij ze drie keer per week een half uur bezig waren met elementen uit het hierboven beschreven traject. Er werd steeds ingestoken op de context van een koning die wil weten hoeveel goud hij heeft om te weten wat hij kan kopen. Al snel bleek dan dat tellen een tijdrovend proces is. Door structuur aan te brengen, werd het telproces aanzienlijk verkort en konden getalrelaties verkend worden. De bedoeling was om elementen uit het drijfvermogen - dat wil zeggen uiterlijk, structuur en inhoud van getallen en getalrelaties verkennen - steviger aan te zetten en ook de te eenzijdige aandacht voor het oefenen van sommen te verminderen. Dit bleek erg nodig, want ook bij Evi thuis werden veel met sommen geoefend. Maar dat kon, na overleg met de leraar en met Lucy, meer naar het spelen van spelletjes worden verschoven, waarbij structuurverkenning en getalrelaties een rol spelen, zoals het spel ‘Halli Galli’,[9] ‘Alle 9’ of spelletjes van het rekenweb.[10]

Bij deze investering in het drijfvermogen zou Evi baat moeten hebben. Na drie maanden zo met haar te hebben gewerkt, werd er weer een reeks quickscans afgenomen. Daaruit kwam het volgende beeld naar voren (fig.7).

Dit beeld lijkt zich beter te verhouden met wat wij zien als een ‘gezonde’ ontwikkeling. Het biedt een basis waarop voortgeborduurd kan worden, waardoor de vloedlijn zich langzaam over de matrix kan uitbreiden.



figuur 7: quickscan-resultaat Evi (januari 2009)

8 En verder

In dit perspectief doorgaand is Evi uitgedaagd om het rekenen tot 100 te verkennen. Dit vond plaats met behulp van de rekentafel (fig.8). De rekentafel is een variant op het goudbord[11] dat een centrale rol als modelmateriaal vervulde in de methode ‘Wis en reken’.[12] Het principe is een equivalent van het oude MAB-materiaal met de essentiële toevoeging dat het om ‘gouden’ blokjes gaat. Daarmee is de relatie met het eerder genoemde bladgoud vrij sterk. Als er mee gewerkt wordt, past het in een lijn waar het idee van ‘unitizing’ (Fosnot & Dolk, 2002) begrepen is, zodat verwarring over een staaf van tien gecombineerde blokjes en een los blokje (beide één stuk hout) niet aanwezig is.

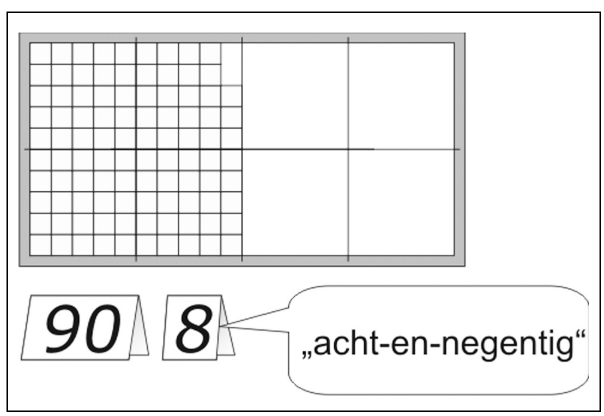
figuur 8: de rekentafel

In feite wordt dit met de introductie van de context rond de rekentafel, waarbij de koning zijn goud bewaart in een schatkist (rekentafel) om de hoeveelheid goud die hij bezit snel te kunnen overzien, al ontkracht. Een staaf van tien is in zijn waarde als goud immers moeilijk te verwarren met een veel kleiner ‘los’ blokje goud. Gravemeijer (1998, 2000) is kritisch op het gebruik van ‘MAB-materiaal’, met name door de ingebakken structuur die het heeft waarmee het sterk lijkt aan te sturen op het cijferalgoritme. Bij de bekende MAB blokken waarmee eenheden, tientallen, enzovoort, worden voorgesteld, doet zich de situatie voor dat tientallen, honderdtallen en dergelijke voor de leraar concrete objecten zijn, maar voor de leerling (nog) niet. Vanuit het referentiekader van de leraar is het vanzelfsprekend dat je tientallen in de tienstaafjes ziet, voor de leerling zijn het gewoon houten staafjes. En het gevaar bestaat dat pogingen van de leraar om de leerlingen te vertellen wat ze geacht worden te zien, leidt tot onbegrepen instrumenteel handelen (Gravemeijer, 2000).

In het voorgaande hebben we geschetst dat de rekentafel past in een lijn van het ‘herontdekken van geld’ en in dat licht dient dit ook gezien te worden. Geld heeft namelijk ook deze ingebakken structuur en dat is niet altijd even inzichtelijk voor kinderen. Met dit materiaal bieden we als het ware een *imagery* voor de abstracte geldwaarden. We bouwen daarmee voort op het kardinale aspect van geld, maar. we onderstrepen daarnaast ook het belang van het ordinale aspect van getallen. We zien voor beide aspecten een belang om deze didactisch uit te werken.[13]
De getallen krijgen namelijk vulling door de ordinale én kardinale aspecten te verkennen als twee verschillende structuuraspecten (laag 2 in de matrix), waardoor getallen rijk gevuld worden en stevige getalrelatienetwerken (laag 3) kunnen ontstaan. Een model als de lege getallenlijn is daarom niet onlosmakelijk met het ordinale aspect van getallen verbonden, maar heeft zijn functie als model voor wiskundig redeneren ongeacht de aard van de getallen. Deze zijn immers op het niveau van getalrelaties en het maken van sommen losgekomen van het ordinale dan wel het kardinale aspect. We zetten de lege getallenlijn dan ook in als een verslagleggingsmodel (voor Evi) bij de rekentafel.

9 Nogmaals het werk van Evi

In een onderwijssessie waarbij gebruik wordt gemaakt van de rekentafel, wordt met Evi een aantal stappen in het leerproces van het optellen en aftrekken tot 100 doorlopen. Hier volgt een beschrijving van dit leerproces, didactisch toegelicht.
Een belangrijk aspect voor het inzicht van Evi is dat ze een gestructureerde hoeveelheid tot 100 kan overzien. We vragen haar in eerste instantie om hoeveelheden goud in de rekentafel te benoemen. Er wordt een aantal hoeveelheden op de rekentafel gezet, zoals 7, 17, 49, 61 en 98, die Evi benoemt. Ze laat ze vervolgens als getal zien met behulp van de getalwaardekaartjes[14] (fig.9).

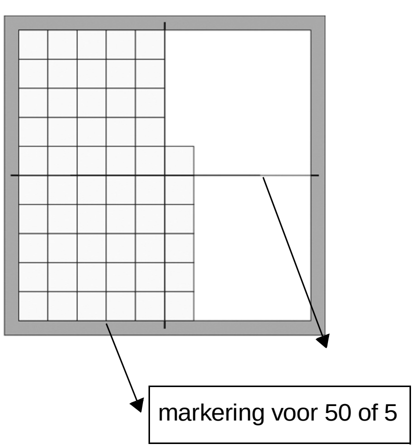


figuur 9: koppeling van een hoeveelheid (goud) aan de schrijf- en zegswijze van een getal

figuur 10a: Evi maakt 150

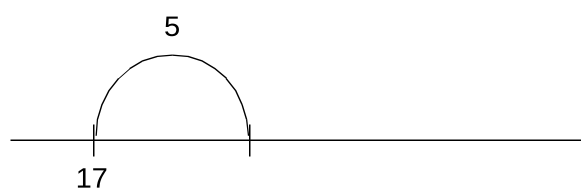
figuur 10b: Evi maakt 162

Er wordt stil gestaan bij de uitspraak van getallen, die afwijkt van de schrijfwijze. De uitspraak is voor kinderen soms verwarrend. Maar Evi is in staat om de hoeveelheden te koppelen aan de juiste getalsymbolen. Dit doet Evi ook moeiteloos voor de getallen boven de 100. Als Evi de structuur van de rekentafel met het plaatsen van enkele getallen heeft verkend, blijkt ze ook in staat om snel hoeveelheden tot 100 op een afbeelding van het goudbord te overzien (fig.10a en 10b). Ze maakt gebruik van de structuur op het bord om het tellen te verkorten. Hoewel Evi in eerste instantie vooral met sprongen van 10 telt, ontdekt ze al werkend de steun van de markering bij 5(0) en is ze in staat om hoeveelheden tot 100 op basis daarvan vast te stellen. Door deze verkenning goed uit te voeren, en vooral aandacht te besteden aan de mogelijke verwarring in de uitspraak van de getallen, wordt een ingang gecreëerd om ook bewerkingen op de rekentafel uit te voeren. Er wordt eenvoudig gestart met zeven goudstukken links en acht goudstukken rechts in het bord. Als gevraagd wordt hoeveel goudstukken dat samen zijn, weet Evi het antwoord snel: ‘15’. Door de snelheid waarmee dit gaat, mogen we concluderen dat ze deze som heeft gememoriseerd (fig.11).



figuur 11: markeringen op het goudbord

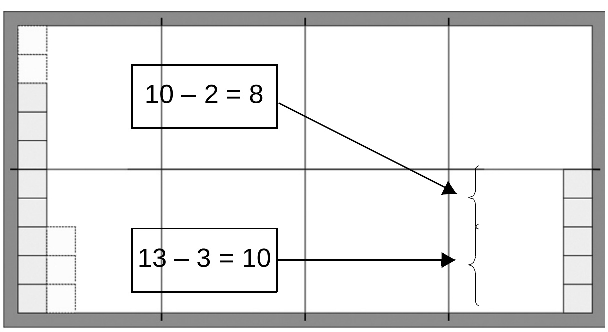
Dat ze deze kennis nog niet kan van toepassen op andere, soortgelijke sommen, blijkt als Evi gevraagd wordt om 17 en 8 bij elkaar te voegen. Het duurt even voor ze reageert. Ze kijkt naar de 17 goudstukken. Dan wordt haar gevraagd wat handig is om er eerst bij te tellen. Ze geeft aan eerst 5 bij de 17 te willen optellen en schuift daarna vier blokken van de 8 naar het midden van het goudbord, waarna ze er daar drie van pakt om de reeds aanwezige 17 aan te vullen tot 20. Dan pakt ze snel nog een van de overgebleven 4 blokjes aan de rechterkant en legt de twee blokjes naast de 20 links op het bord. Lucy noteert de handeling van Evi globaal op de getallenlijn en vraagt hoeveel 17 en 5 samen is. Evi antwoordt nu, na een korte blik op het goudbord, vlot: ‘22’ (fig.12).



figuur 12: beschrijving van Evi’s handeling op de lege getallenlijn

Lucy gaat in op de aanpak van Evi, waarbij het aanvullen tot 20 - wat Evi impliciet deed - geëxpliciteerd wordt. Je zou daarbij kunnen zeggen dat hier de eerder aangehaalde, structuralistische benadering gevolgd wordt, maar we zien echter dat niet de structuur van de blokken gevormd in ‘tien-staven’ en ‘lossen’ problemen oplevert, maar dat er door de structuur van de rekentafel een natuurlijk proces van aanvullen ontstaat. Dit is inherent aan het decimale stelsel, waarvoor - in onze ogen - geen argument te bedenken is om daar niet vertrouwd mee te raken en kinderen dat te laten ontdekken.
Evi pikt dit snel op en past dit inzicht direct toe in de opgaven als 47 + 8; 147 + 8; 47 + 28 en zelfs bij een zelfbedachte opgave als 55 + 47. Ze wordt daarbij ook meer

en meer uitgedaagd om de handelingen die ze op de rekentafel verricht ook op de lege getallenlijn te beschrijven. In feite symboliseert ze daarmee het proces van optellen en komt ze voorzichtig op het meer formele niveau van de getalrelaties terecht. Het is te kort door de bocht om te concluderen dat ze hiermee de inhoud en structuur van de getallen tot 100 afdoende heeft verkend en dat ze voldoende toegerust is om de getallen tot 100 aan elkaar te relateren en de getalsrelaties in opgaven inzichtelijk te benutten, maar een eerste verkenning is hier wel mee gemaakt. Met name het vlot benoemen van de getalbeelden tot 100 op de rekentafel wordt veelvuldig geoefend door Evi steeds zelf de getallen neer te laten leggen en vervolgens te laten benoemen. Deze getalbeelden zijn de basis voor het verder uitbouwen van inzicht bij het rekenen tot 100. Evi raakt op dit gebied steeds meer vertrouwd met de getalbeelden.
Bij het aftrekken speelt het inzichtelijk en efficiënt gebruik van de (decimale) structuur van de getallen een nog grotere rol dan bij het optellen. Een van de voordelen van de rekentafel is dat bij aftrekopgaven de in mindering gebrachte hoeveelheid tegenover de overgebleven hoeveelheid op het bord zichtbaar blijft. Een denkfout, zoals '64 – 37 = 33' wordt hiermee overtuigend ontmaskerd. Evi maakt die fout dan ook niet. Eerst maakt ze de opgave 13 – 5, die Evi vrij vlot via 13 – 3 = 10 en 10 – 2 = 8 tot het juiste antwoord brengt (fig.13).



figuur 13: 13 – 5 op de rekentafel

En Lucy noteert weer de stappen die Evi maakt op een lege getallenlijn. Door steeds de stappen op de lege getallenlijn te laten zien en te bespreken, wordt Evi ondersteund in haar wiskundig abstractieproces. Met behulp van de uitgeschreven denkstappen op de lege getallenlijn, worden opgaven als 63 - 8, 163 - 8 en 177 - 9, opgelost. Ook hier wordt het getalgebied tot 100 eigenlijk moeiteloos uitgebreid naar boven de 100, steeds omdat Evi laat zien goed te begrijpen wat ze doet en door haar - waar nodig - te ondersteunen in haar denkproces. Evi krijgt zo vertrouwen in haar rekenwerk en er is vanuit de remedial teaching aandacht voor waar zij zich veilig bij voelt. Maar in het vervolg van de sessie blijkt dat de vermoeidheid toeslaat en dat Evi af en toe de draad kwijt raakt, maar dat is logisch na zo'n grote inspanning.

10 Conclusie

We hebben het traject dat Evi heeft doorlopen hier in vogelvlucht beschreven. Daarop terugblikkend wordt duidelijk dat Evi eigenlijk een gewoon kind is, dat behoefte heeft aan didactische steun bij haar leerproces. We hebben laten zien dat we vanuit een visie op groei, greep krijgen op hiaten in die groei en we laten vooral zien dat die hiaten in betrekkelijk korte tijd opgevuld kunnen worden. Maar niet minder belangrijk is dat we Evi tot een opmerkelijk hoog niveau laten doorstoten. De ontwikkeling van een kind dat in september 2008 nog veel problemen had op het gebied van rekenen tot 10, in januari 2009 hiaten bij het rekenen tot 10 en 20 heeft weggewerkt en dat in mei 2009 getalstructuren en - relaties verkent en gebruikt boven de 100, is opmerkelijk te noemen. Echt opmerkelijk is het ons inziens echter niet. Wij denken dat met aandacht voor mogelijke problemen en een goede didactiek met passende didactische materialen, elk kind niet alleen 'vaardig' vanuit de oude idealen, maar ook met 'inzichten', toegerust kan worden voor een toekomst die past bij de huidige generatie en verder gaat dan die van voorgaande generaties (Gravemeijer (2009); Ten Berge (2009)).
In deze zin kunnen we concluderen dat onderwijs ondanks alle inspanningen van leraren, methodeschrijvers, de inspecties en anderen, een complex vakgebied blijft. We willen dan ook geen versimpeling van de realiteit of een opdeling daarvan in hapklare brokken voorstellen, maar juist in didactisch zin een houvast geven en leraren helpen om met deze complexe materie van leerlingen die dreigen achterstanden op te lopen, om te gaan. We zijn dan ook van mening dat we met het onderwijs voor een grote uitdaging staan om kinderen in een gewenst leerproces te krijgen. De leraar zal met kinderen aan de slag moeten gaan, hen prikkelen, uitdagen, vragen stellen en dit alles gericht op wat we het drijfvermogen noemden. Daardoor ontwikkelen kinderen inzicht in getallen. Dat kun je ze niet leren door de essenties uit te leggen, je zult moeten weten waar didactische perspectieven zitten om vervolgens maatregelen te bedenken om die perspectieven in te zetten. We hebben ervaren dat de didactische concepten van de ijsberg-metafoor en de matrix leraren kunnen helpen om geschikte lijnen te ontwerpen en het juiste materiaal in te kunnen zetten. Wij zijn overtuigd van de kwaliteiten van leraren, maar zien ook dat zij vaak veel moeite hebben greep te krijgen op wat er in het reken-wiskundeonderwijs echt toe doet. Daarom proberen we nieuwe wegen in de didactiek uit te stippelen en proberen we, bijvoorbeeld met het beschrijven van een goed doorlopen leerproces - als dat van Evi - voor het voetlicht te krijgen wat er toe doet. Men zal zich in het huidige onderwijs los moeten worstelen van de bestaande kaders waar registreren, corrigeren, documenteren, haast en stress de boventoon zijn

gaan voeren ten opzichte van waar het echt om gaat: 'de ontwikkeling van kinderen'. Leraren zullen dus het lef moeten hebben om met kinderen een andere weg in te slaan. Een weg die aansluit bij het dynamische denken en leren van kinderen, met gevoeligheid voor de verwarring die kinderen kunnen ervaren.

Noten

1 Zie http://www.parwo.nl
2 De ijsbergmetafoor werd in eerste instantie binnen het project speciaal rekenen van het Freudenthal Instituut ontwikkeld (zie daarvoor http://www.fi.uu.nl/speciaalrekenen/welcome.html) en door het ontwerpbureau Edumat (http://www.edumat.nl) uitgewerkt. Later werd het in het kader van het PARWO-project verbonden met de Stichting Speciaal Onderwijs Tilburg (SSOT).
3 Zie: http://www.parwo.nl/Matrixalsdidactisch-kader.html#Topic5
4 We kiezen er hier voor om realiteit tussen aanhalingstekens te zetten omdat we hier willen refereren aan het 'gezond verstand' van kinderen (I prefer to apply the term 'reality' to that which at a certain stage common sense experiences as real. (Freudenthal, geciteerd in Gravemeijer 2000, pag. 21).
5 Zie: http://www.ssot.eu/rw/PARWO-SSOT-ervaringen%20in%20het%20S(B)O/
6 Zie: F. Moerlands, H. van der Straaten en D. van der Straaten (2008) voor een nadere uitwerking hiervan.
7 Dit is een term die voortvloeit uit de ijsbergmetafoor. Bij het woord '(her)ontdekken' wordt er bewust voor gekozen om (her) tussen haakjes te zetten om aan te geven dat het zowel om het opnieuw ontdekken als om het daadwerkelijke proces van ontdekken zelf kan gaan.
8 Goud kan hier natuurlijk ook gezien worden als een van de waardevolle zaken die in de historie gebruikt zijn als 'gewichtig' ruilmiddel (zoals bijvoorbeeld zout) en later zijn vervangen door wat wij 'geld' noemen.
9 Het bestaande spel 'Halli Galli' is in aangepaste vorm met verschillende getalbeelden gespeeld.
Zie: http:// www.edumat.nl/pom/Getalbeeldent.m24.html#Topic6 voor een voorbeeld.
10 Zie: www.rekenweb.nl
11 Zie: http://www.edumat.nl/007-206-Schubi/Goudbord/ voor een toelichting.
12 'Wis en reken' is een realistische reken-wiskundemethode, uitgegeven door uitgeverij Bekadidact.
13 Het ordinale aspect van getallen krijgt vooral vorm door activiteiten als 'meten met kralen' (Moerlands, 2006; Van Dam, 2005 & Makkink, 2004) en de 'getallenslang' (http://www.edumat.nl/007-204-Perfodidac/Getallenslang%20leraar/)
14 Zie http://www.edumat.nl/007-204-Perfodidac/Getalwaardekaarten/ voor onder andere een beschrijving en lesexperiment met deze kaartjes.

Literatuur

Berge, H. ten (2009). *Kennissysteem de kunst van kennis.* Ontleend aan: http://www.interactum.nl/Medewerkers/documents-Key%20Note%20Lezing%20H%20%20ten%20Berge-Rd-MC%2017-04-2009.pdf.

Boswinkel, N. & F.J. Moerlands (2003. Het topje van de ijsberg. In: K. Groenewegen (ed.). *Nationale Rekendagen 2002 - een praktische terugblik.* Utrecht: Freudenthal Instituut, 103-114.

Dam, R. van, (2005). Meten met Kralen. *Volgens Bartjens, 25* (1), 8-10.

Dolk, M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag* (over denken en handelen van leraren in onmiddellijke onderwijssituaties). Culemborg: Technipress (proefschrift).

Dolk, M. (2004). De volgende stap: op weg naar beter onderwijs. In: Keijzer, R. & E. de Goeij (eds.). *Rekenen-wiskunde als rijke bron.* Utrecht: Freudenthal Instituut, 25-32.

Dolk, M., J. den Hertog & K. Gravemeijer (2002). Using Multimedia Cases for Educating the Primary School Mathematics Teacher Educator: A Design Study. *International Journal of Educational Research, 37*(2), 161-178.

Fosnot, C. & M. Dolk (2000). Het leerlandschap. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 21*(2), 29-37.

.Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task,* Dordrecht: Reidel.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developping realistic mathematics education.* Culemborg: Technipress.

Gravemeijer, K.P.E. (1998). Symboliseren en modelleren als wiskundige activiteit. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 16*(2), 11-18.

Gravemeijer, K.P.E. (2000). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn (een persoonlijk perspectief). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 21*(2), 11-23.

Gravemeijer, K.P.E. (2002). *Preamble: From Models to Modeling*. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (eds.). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 7-22.

Gravemeijer, K.P.E. (2004). *Creating opportunities for students to reinvent mathematics*. Paper gepresenteerd tijdens de ICME 10, Kopenhagen, Denmark, 4-11.

Gravemeijer, K.P.E. (2009). *Leren voor later* - intreerede Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven: Van Santvoort.

Gravemeijer, K.P.E. & H.A.A. van Eerde (2004). Verschil maken. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (eds.). *Een wereld van verschillen, differentiatie in het rekenwiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Instituut, 9-32.

Makkink, A. (2004). Een gifgroene sok, kralen en spiegeltjes. *Het onderwijsblad, 1,* 28-33.

Moerlands, F., D. van der Straaten & H. van der Straaten (2008). Quickscans met de PARWO-matrix. *Volgens Bartjens, 28*(2), 25-27.

Moerlands, F. (2006). Meten met kralen. *JSW, 90,* 23-30.

Straaten, H. van der & F. Moerlands (2009. *Passend rekenwiskunde onderwijs voor alle leerlingen.* Ontleend aan: http://www.rekenpilots.nl/attachments/2023001Passend_reken-wiskundeonderwijs_voor_alle_leerlingen_lv_(210909).pdf.

Vermeulen, W., F. Moerlands & P. de Wert (2008). Faseren bij het leren van rekenen en wiskunde. *JSW 92,* 6-11.

summary